М. И. Шабунин М. В. Ткачёва
Н. Е. Фёдорова

Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы

11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

М. И. Шабунин М. В. Ткачёва
Н. Е. Фёдорова

Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы

к учебнику Ш. А. Алимова и других

11 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

9-е издание

Москва
«Просвещение»
2018

УДК 373.167.1:[512 + 517] 12+
ББК 22.14я72
Ш13

Авторы: М. И. Шабунин,
М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова

В подготовке издания помощь авторам оказал
Р. Г. Газарян

Шабунин М. И.
Ш13 Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы к учебнику Ш. А. Алимова и других. 11 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова]. — 9-е изд. — М.: Просвещение, 2018. — 191 с.: ил. — ISBN 978-5-09-057438-9.

Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа и опираются на учебники авторов Ш. А. Алимова и др. Книга содержит задания к большинству параграфов, контрольные работы, задания для подготовки к экзамену и для интересующихся математикой, а также справочные сведения и примеры с подробными решениями.

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-057438-9

Предисловие

Основная цель пособия — дополнить систему упражнений учебника заданиями, позволяющими учителю организовать дифференцированную и индивидуальную работу учащихся на всех этапах урока.

Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа, а также к основным темам курса алгебры основной школы. Все предложенные в пособии задания снабжены либо ответами в конце книги, либо ответами, решениями или указаниями сразу после их формулировки.

В каждой главе пособия содержатся:

1) дидактические материалы к большинству параграфов учебника;

2) контрольная работа по теме;

3) задания для подготовки к экзамену по изучаемой теме (большинство из предложенных заданий давалось на выпускных экзаменах в школах России начиная с 1991 г.);

4) задания для учащихся, интересующихся математикой (одна из целей этих заданий — подготовка к поступлению в вуз).

Каждый параграф пособия включает:

1) справочные сведения;

2) примеры и задачи с подробными решениями;

3) разноуровневые задачи для самостоятельной работы в двух вариантах (каждое задание имеет условную балловую оценку степени его сложности).

Материалы пособия могут служить основной частью учебно-методического комплекта по алгебре и началам математического анализа для учащихся 11 классов, обучающихся по программе базового уровня стандарта математического образования.

Используя балловую оценку заданий, учитель может:

• организовать «плавную» дифференциацию обучения математике: в зависимости от качества усвоения темы каждому учащемуся предлагать конкретный балловый диапазон выполняемых заданий, помогая постепенно поднимать уровень своих математических знаний и умений;

• предложить разнообразные виды частично самостоятельных, самостоятельных и проверочных работ, например выполнить больший объём заданий разной степени сложности и указать, сколько баллов нужно набрать для получения той или иной оценки («3», «4» или «5»).

Следует заметить, что обязательному уровню знаний и умений соответствуют задания, оценённые в пособии в основном баллами 1, 2, 3, 4. Учащиеся, претендующие на отличную оценку, должны справляться с заданиями, оценёнными в 6—7 баллов.

Контрольные работы по темам состоят из двух частей. Выполнение первой части работы (до черты) позволяет учащемуся получить оценку «3». Для получения оценки «4» учащийся должен справиться с первой частью работы и верно решить одну из задач второй части (за чертой). Чтобы получить оценку «5», помимо выполнения первой части работы, учащийся должен решить не менее двух любых заданий из второй части работы.

Расположение материала в пособии соответствует учебнику алгебры и начал математического анализа авторов Ш. А. Алимова и др. (2010 г. и последующие годы издания). Однако содержание и структура пособия позволяют с успехом использовать его и при работе по другим учебникам.

§ 38[1]. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Справочные сведения

Функция	Область определения	Множество значений
$y = \sin x$	$\boldsymbol{R}$	$[-1;\ 1]$
$y = \cos x$	$\boldsymbol{R}$	$[-1;\ 1]$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{R}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{R}$

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции:

1) $y = \sin\sqrt{2 - x^2}$; 2) $y = \dfrac{2}{\cos 2x + \cos x}$.

Решение.

1) Выражение $\sin\sqrt{2 - x^2}$ имеет смысл, если $2 - x^2 \geqslant 0$, т. е. если $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

2) Выражение $\dfrac{2}{\cos 2x + \cos x}$ не имеет смысла при всех таких значениях x, что $\cos 2x + \cos x = 0$. Так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то нужно решить уравнение $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, корни которого $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, за исключением чисел $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Найти множество значений функции $y = 2\sin 3x + 1$.

Решение.

Так как $-1 \leqslant \sin 3x \leqslant 1$, то $-2 \leqslant 2\sin 3x \leqslant 2$, откуда $-1 \leqslant 2\sin 3x + 1 \leqslant 3$, причём функция $y = 2\sin 3x + 1$ при-

[1] Нумерация параграфов в пособии полностью соответствует учебнику алгебры и начал математического анализа авторов Ш. А. Алимова и др.

нимает все значения из отрезка $[-1; 3]$. Следовательно, множество значений этой функции — отрезок $[-1; 3]$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 24\cos x + 7\sin x + 5$;

2) $y = 5\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x$.

Решение.

1) Воспользуемся методом введения вспомогательного угла при преобразовании выражения вида $a\cos x + b\sin x$. Умножив и разделив выражение $24\cos x + 7\sin x$ на число $\sqrt{24^2 + 7^2} = 25$, получим

$$24\cos x + 7\sin x = 25\left(\frac{24}{25}\cos x + \frac{7}{25}\sin x\right) = 25\sin(x + \varphi),$$

где $\sin\varphi = \frac{24}{25}$, $\cos\varphi = \frac{7}{25}$. Тогда

$$y = 25\sin(x + \varphi) + 5.$$

Так как $-1 \leqslant \sin(x+\varphi) \leqslant 1$, то $-25 \leqslant 25\sin(x+\varphi) \leqslant 25$, откуда следует, что $-20 \leqslant y \leqslant 30$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 30, а наименьшее равно -20.

2) Используя формулы

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

получаем $y = 5\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x$, откуда

$$y = \frac{5}{2}(1-\cos 2x) + 2\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2},$$

т. е. $y = 3 + 2\sin 2x - 2\cos 2x$.

Так как $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, то

$$y = 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда следует, что $3 - 2\sqrt{2} \leqslant y \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$.

Следовательно, наибольшее значение функции равно $3 + 2\sqrt{2}$, а наименьшее значение равно $3 - 2\sqrt{2}$.

Замечание. В общем случае нахождение множества значений функции $y = f(x)$ сводится к тому, чтобы найти все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет действительные корни.

4. Найти множество значений функции $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$.

Решение. Найдём все значения a, при которых уравнение $\frac{x+2}{(x+1)^2} = a$ имеет действительные корни. При $x \neq -1$ это уравнение равносильно каждому из уравнений

$$a(x+1)^2 - (x+2) = 0, \qquad ax^2 + (2a-1)x + a - 2 = 0.$$

Полученное уравнение при $a = 0$ имеет корень $x = -2$, а при $a \neq 0$ является квадратным и имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен, т. е. $D = (2a-1)^2 - 4a(a-2) \geqslant 0$, откуда $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Ответ. Множество значений функции — промежуток $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти область определения функции (1—4).

1. $\boxed{1}$ $y = \frac{x-2}{x+3}$.
2. $\boxed{2}$ $y = \sqrt{2x-5}$.
3. $\boxed{1}$ $y = 2^{x+1}$.
4. $\boxed{2}$ $y = \ln(x^2 - 2)$.

Найти область определения и множество значений функции, график которой изображён на рисунке (5—7).

5. $\boxed{2}$

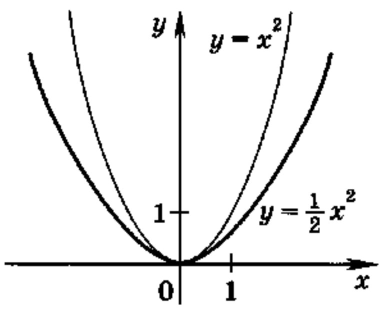


Рис. 1

6. $\boxed{2}$

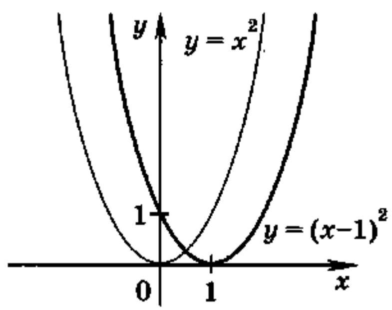


Рис. 2

7. $\boxed{2}$

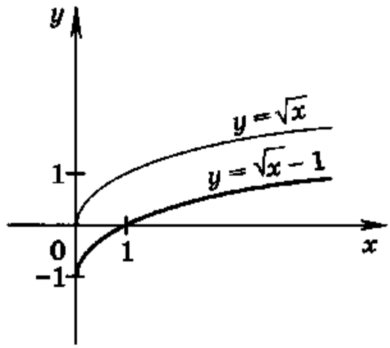


Рис. 3

Найти область определения и множество значений функции $y = f(x)$, заданной графически на рисунке (8—9).

8. $\boxed{2}$

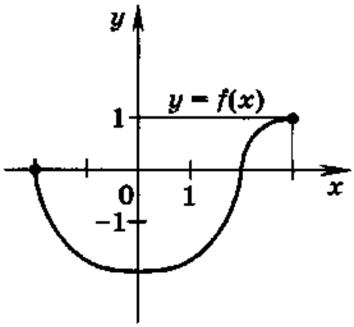


Рис. 4

9. $\boxed{2}$

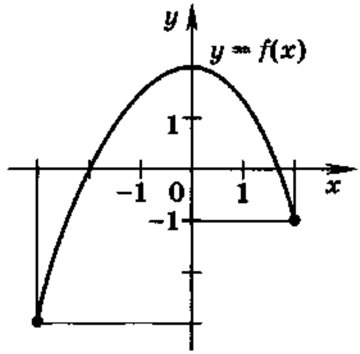


Рис. 5

Найти множество значений функции на заданном отрезке (10—11).

10. $\boxed{3}$ $y = 2x^2$, [0; 3].

11. $\boxed{3}$ $y = \sqrt{3x-1}$, [1; 3].

Найти область определения и множество значений функции (12—14).

12. $\boxed{3}$ $y = -\dfrac{2}{x}$.

13. $\boxed{3}$ $y = x^2 + 1$.

14. $\boxed{3}$ $y = \sqrt{x-2}$.

Найти область определения функции (15—29).

15. $\boxed{2}$ $y = -\sin x$.

16. $\boxed{2}$ $y = -\cos 2x$.

17. $\boxed{3}$ $y = \sin \frac{3}{x}$.

18. $\boxed{3}$ $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

19. $\boxed{3}$ $y = \sin\sqrt{x-1}$.

20. $\boxed{3}$ $y = \frac{3}{\sin x}$.

21. $\boxed{4}$ $y = \frac{1}{\cos x - 1}$.

22. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

23. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

24. $\boxed{4}$ $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

25. $\boxed{5}$ $y = \frac{2}{\sin x + 2\cos x}$.

26. $\boxed{5}$ $y = 2\sin x - \operatorname{tg} 3x$.

27. $\boxed{6}$ $y = \sqrt{\cos x}$.

28. $\boxed{7}$ $y = \ln \operatorname{tg} x$.

29. $\boxed{8}$ $y = \sqrt{\ln \sin x}$.

Найти множество значений функции (30—39).

30. $\boxed{3}$ $y = \cos 2x$.

31. $\boxed{5}$ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

32. $\boxed{5}$ $y = \cos 2x + 1$.

33. $\boxed{5}$ $y = 2\cos 2x + 1$.

34. $\boxed{5}$ $y = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

35. $\boxed{5}$ $y = \cos 2x - 2\sin^2 x$.

36. $\boxed{6}$ $y = \cos 2x - 4\cos^2 x$.

37. $\boxed{6}$ $y = \sin x + \cos x$.

38. $\boxed{7}$ $y = 5\cos 2x + 12\sin 2x$.

39. $\boxed{8}$ $y = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (40—44).

40. $\boxed{5}$ $y = 5\sin x\cos x$.

41. $\boxed{6}$ $y = 3 - 4\sin x\cos x$.

42. $\boxed{7}$ $y = \sqrt{2}\sin x + \cos x$.

43. $\boxed{8}$ $y = 9\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$.

44. $\boxed{8}$ $y = 13\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x$.

Вариант II

Найти область определения функции (1—4).

1. $\boxed{1}$ $y = \frac{3 - x}{x - 2}$.

2. $\boxed{2}$ $y = \sqrt{7 - 3x}$.

3. $\boxed{1}$ $y = 3^{2x}$.

4. $\boxed{2}$ $y = \lg(3 - x^2)$.

Найти область определения и множество значений функции, график которой изображён на рисунке (5—7).

5. $\boxed{2}$

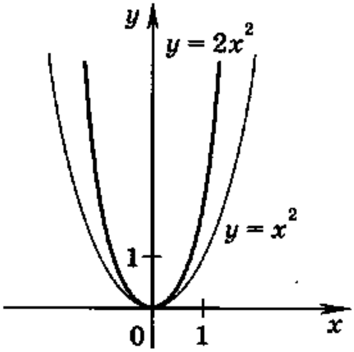


Рис. 6

6. $\boxed{2}$

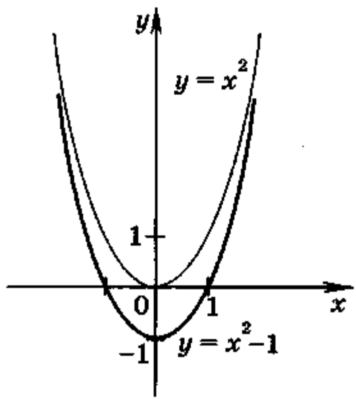


Рис. 7

7. $\boxed{2}$

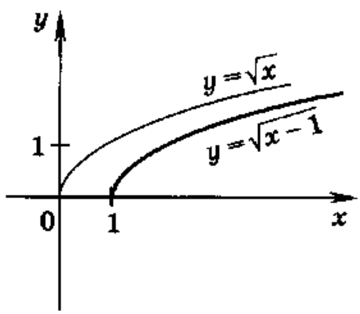


Рис. 8

Найти область определения и множество значений функции $y = f(x)$, заданной графически на рисунке (8—9).

8. $\boxed{2}$

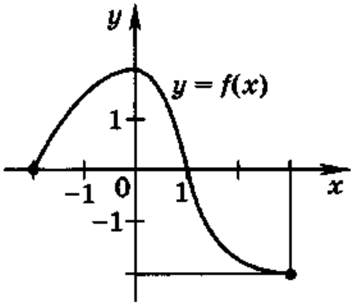


Рис. 9

9. $\boxed{2}$

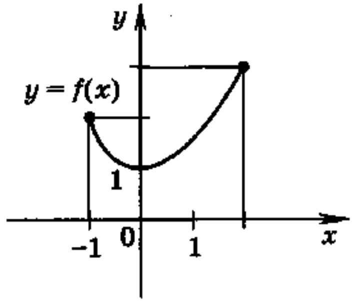


Рис. 10

Найти множество значений функции на заданном отрезке (10—11).

10. $\boxed{3}$ $y = \dfrac{x^2}{3}$, $[-2;\ 0]$.

11. $\boxed{3}$ $y = \sqrt{2x+5}$, $[-1;\ 2]$.

Найти область определения и множество значений функции (12—14).

12. $\boxed{3}$ $y = \dfrac{3}{x}$.

13. $\boxed{3}$ $y = 3 - x^2$.

14. $\boxed{3}$ $y = \sqrt{x+2}$.

Найти область определения функции (15—29).

15. $\boxed{2}$ $y = -\cos x$.

16. $\boxed{2}$ $y = -\sin 3x$.

17. $\boxed{3}$ $y = \cos \dfrac{2}{x}$.

18. $\boxed{3}$ $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

19. $\boxed{3}$ $y = \cos\sqrt{1-x}$.

20. $\boxed{3}$ $y = \dfrac{2}{\cos x}$.

21. $\boxed{4}$ $y = \dfrac{1}{1 - \sin x}$.

22. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

23. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg} 3x$.

24. $\boxed{4}$ $y = \dfrac{2}{\operatorname{tg} x}$.

25. $\boxed{5}$ $y = \dfrac{3}{3\sin x - \cos x}$.

26. $\boxed{5}$ $y = 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 3\cos x$.

27. $\boxed{6}$ $y = \sqrt{\sin x}$.

28. $\boxed{7}$ $y = \ln\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

29. $\boxed{8}$ $y = \sqrt{\ln\cos x}$.

Найти множество значений функции (30—39).

30. $\boxed{3}$ $y = \sin\frac{x}{2}$.

31. $\boxed{5}$ $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

32. $\boxed{5}$ $y = \sin\frac{x}{2} - 1$.

33. $\boxed{5}$ $y = 3\sin\frac{x}{2} - 1$.

34. $\boxed{5}$ $y = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.

35. $\boxed{5}$ $y = 2\cos^2 x + \cos 2x$.

36. $\boxed{6}$ $y = \cos 2x + 6\sin^2 x$.

37. $\boxed{6}$ $y = \cos x - \sin x$.

38. $\boxed{7}$ $y = 6\sin x - 8\cos x$.

39. $\boxed{8}$ $y = 9\sin^2 x + 6\sin x\cos x + \cos^2 x$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (40—44).

40. $\boxed{5}$ $y = 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

41. $\boxed{6}$ $y = 6\sin 2x\cos 2x + 5$.

42. $\boxed{7}$ $y = \sin x + 2\cos x$.

43. $\boxed{8}$ $y = 7\sin^2 x + 8\sin x\cos x + \cos^2 x$.

44. $\boxed{8}$ $y = 5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$.

§ 39. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций

Справочные сведения

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для каждого значения x из её области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для каждого значения x из её области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из её области определения выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = cf(ax + b)$, где a, b и c — постоянные и $a \neq 0$, также периодическая с периодом $t = \frac{T}{|a|}$.

Функция	Чётность, нечётность	Наименьший положительный период
$y = \sin x$	Нечётная	2π
$y = \cos x$	Чётная	2π
$y = \operatorname{tg} x$	Нечётная	π
$y = \operatorname{ctg} x$	Нечётная	π

Примеры с решениями

1. Выяснить, является ли чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной функция:

1) $y = x^3 - \frac{x}{2} + \sin x$; 2) $y = x^3 - \sin x + 1$;

3) $y = x^2 + \cos 3x$; 4) $y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$;

5) $y = \frac{1 + \sin x + 2\sin^2 x + 3\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + 1}$.

Решение.

1) Функция определена на множестве действительных чисел. Найдём

$$y(-x) = (-x)^3 - \frac{(-x)}{2} + \sin(-x) = -\left(x^3 - \frac{x}{2} + \sin x\right) = -y(x).$$

Ответ. Функция нечётная.

2) Область определения функции — множество R. Сравним $y(-x)$ и $y(x)$, $y(-x)$ и $-y(x)$:

$$y(-x) = (-x)^3 - \sin(-x) + 1 = -x^3 + \sin x + 1,$$
$$-y(x) = -x^3 + \sin x - 1, \quad y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Ответ. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

3) Для каждого x из области определения R выполняется равенство

$$y(-x) = (-x)^2 + \cos 3(-x) = x^2 + \cos 3x = y(x).$$

Ответ. Функция чётная.

4) Область определения функции — множество чисел, для которых $\sin x \neq x$ $(x \neq 0)$. Имеем

$$y(-x) = \frac{(-x) + \sin(-x)}{(-x) - \sin(-x)} = \frac{-x - \sin x}{-x + \sin x} = \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = y(x).$$

Ответ. Функция чётная.

5) Заметим, что в некоторых случаях исследование функции на чётность можно упростить. Например, если функция определена в точке x_0 и не определена в точке $-x_0$, то она не может быть ни чётной, ни нечётной. В данном случае $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ имеет смысл, а $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ смысла не имеет.

Ответ. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

2. Доказать, что функция $y = \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$ является периодической с периодом $T = \frac{2\pi}{5}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Докажем, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ верно равенство $f(x + T) = f(x)$, т. е. $\cos\left(5(x+T)+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$. Действительно, $\cos\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)+ \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$, поскольку $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ при $t \in \boldsymbol{R}$.

Итак, равенство $f(x + T) = f(x)$ выполняется для любого x из области определения, т. е. $T = \frac{2\pi}{5}$ — период данной функции.

3. Доказать, что функция y является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin\frac{3x}{4}$, $T = \frac{8\pi}{3}$; 2) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $T = 3\pi$.

Решение.

1) Функция определена на всей числовой оси. Для любого x выполняется равенство $y\left(x + \frac{8\pi}{3}\right) = \sin\frac{3}{4}\left(x + \frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3}{4}x + 2\pi\right) = \sin\frac{3}{4}x$, так как $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ для любого t. Итак, $y\left(x + \frac{8\pi}{3}\right) = y(x)$, т. е. $T = \frac{8\pi}{3}$.

2) Для любого x из области определения функции $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ справедливо равенство $y(x + 3\pi) = \operatorname{tg}\frac{1}{3}(x + 3\pi) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \pi\right) =$

$= \operatorname{tg}\frac{x}{3} = y(x)$, так как $\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t$. Следовательно, функция $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ является периодической с периодом 3π.

Замечание. Можно доказать, что если $k \neq 0$, то функции $\sin kx$ и $\cos kx$ являются периодическими, а их наименьший положительный период равен $\frac{2\pi}{k}$; функция $\operatorname{tg} kx$ имеет наименьший положительный период $\frac{\pi}{k}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Выяснить, является ли чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной функция (1—8).

1. $\boxed{1}$ $y = \frac{x^3 - x}{2}$.
2. $\boxed{2}$ $y = \frac{x^3}{x^2 + 2}$.
3. $\boxed{1}$ $y = 3 + x^2 - 2x^4$.
4. $\boxed{2}$ $y = x^3 \cos x$.
5. $\boxed{2}$ $y = x^2 + \cos x$.
6. $\boxed{2}$ $y = \frac{1}{2\sin x + 1}$.
7. $\boxed{3}$ $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.
8. $\boxed{3}$ $y = \sin 2x + \cos x + 1$.
9. $\boxed{4}$ Чётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Достроить график этой функции, если его часть при $x \geqslant 0$ изображена на рисунке 11.
10. $\boxed{4}$ Достроить график нечётной функции, определённой на всей числовой прямой (рис. 12).

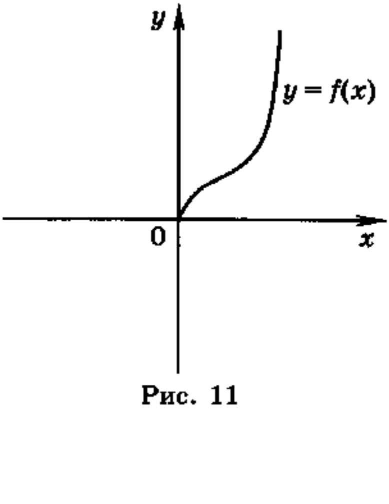


Рис. 11

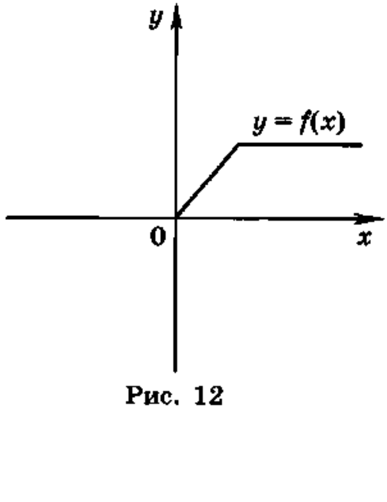


Рис. 12

11. $\boxed{4}$ Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Достроить её график на промежутке $[-\pi; 0]$, если часть её графика на отрезке $[0; \pi]$ изображена на рисунке 13 и известно, что функция $y = f(x)$ чётная.

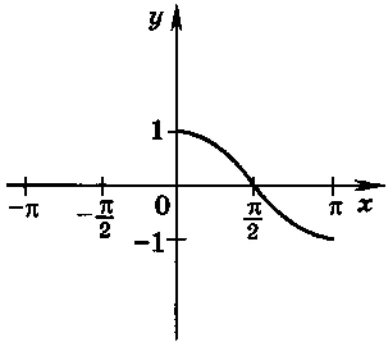


Рис. 13

Выяснить, является ли функция $g(x)$ чётной или нечётной (12—13).

12. $\boxed{5}$ $g(x) = f(x) + \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — чётные функции.

13. $\boxed{5}$ $g(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — нечётные функции.

Изобразить схематически график периодической функции, если на рисунке изображена часть графика на промежутке, длина которого равна наименьшему положительному периоду функции (14—15).

14. $\boxed{5}$

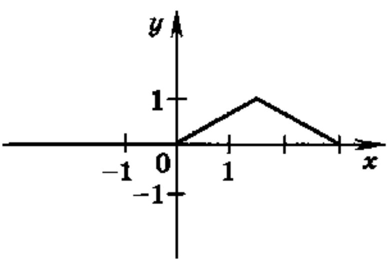


Рис. 14

15. $\boxed{5}$

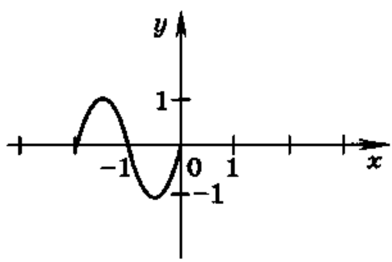


Рис. 15

16. $\boxed{5}$ Какие из функций $y = \cos 2x$, $y = x^2$, $y = \sin\sqrt{x}$, $y = |\operatorname{tg} x|$ являются периодическими?

Доказать, что функция является периодической с периодом T (17—24).

17. $\boxed{4}$ $y = \sin\dfrac{x}{2}$, $T = 4\pi$.

18. $\boxed{4}$ $y = \cos\dfrac{2}{3}x$, $T = 3\pi$.

19. $\boxed{5}$ $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $T = \pi$.

20. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $T = \dfrac{\pi}{3}$.

21. $\boxed{6}$ $y = \cos 3x$; $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

22. $\boxed{6}$ $y = \sin\dfrac{5x}{8}$; $T = \dfrac{16\pi}{5}$.

23. $\boxed{6}$ $y = \operatorname{tg}\dfrac{2x}{3}$; $T = \dfrac{3\pi}{2}$.

24. $\boxed{7}$ $y = \sin 2x + \cos x$; $T = \pi$.

25. $\boxed{7}$ Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом $T = 9$. На рисунке 16 изображён график этой функции при $-3 \leqslant x \leqslant 6$. Найти значение выражения $f(-6) + f(10) - f(-4)$.

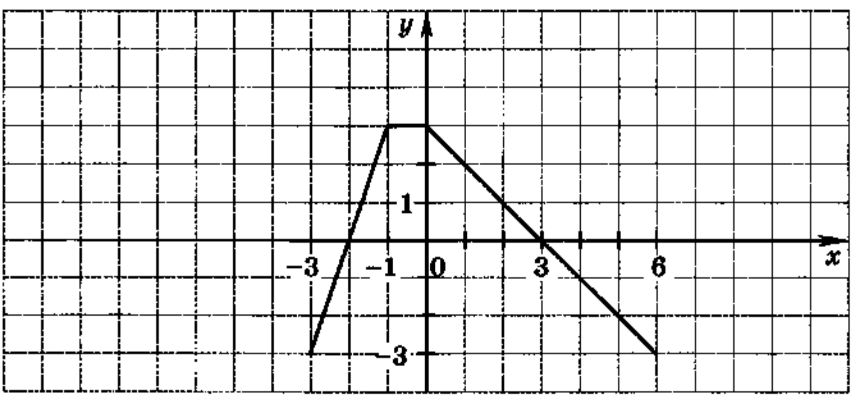


Рис. 16

26. $\boxed{7}$ Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом $T = 6$. На рисунке 17 изображён график этой функции при $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Найти значение выражения $f(-4) + f(5) - f(7)$.

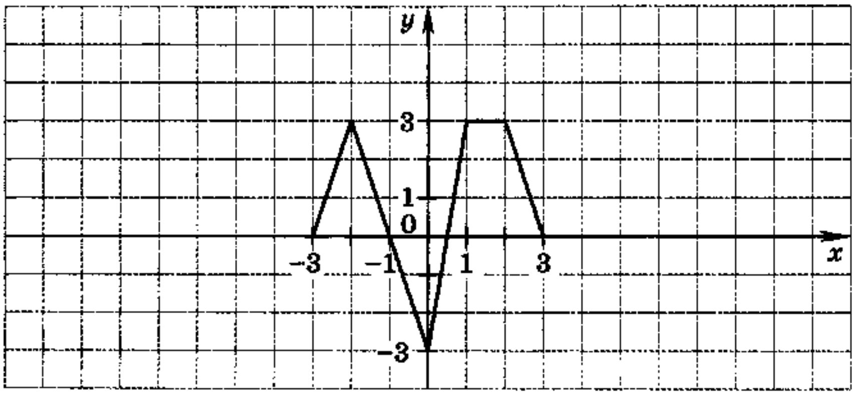


Рис. 17

Вариант II

Выяснить, является ли функция чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной (1—8).

1. $\boxed{1}$ $y = \frac{x}{3} + \frac{x^3}{4}$.

2. $\boxed{2}$ $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$.

3. $\boxed{1}$ $y = x^2 - x^4 + 1$.

4. $\boxed{2}$ $y = \sin x \cdot x^3$.

5. $\boxed{2}$ $y = x - \sin x$.

6. $\boxed{3}$ $y = \frac{1}{1 - \sqrt{2} \sin x}$.

7. $\boxed{3}$ $y = \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

8. $\boxed{3}$ $y = 1 - \cos x + \sin x$.

9. $\boxed{4}$ Чётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Достроить график этой функции, если его часть при $x \geqslant 0$ изображена на рисунке 18.

10. $\boxed{4}$ Достроить график нечётной функции, определённой на всей числовой прямой (рис. 19).

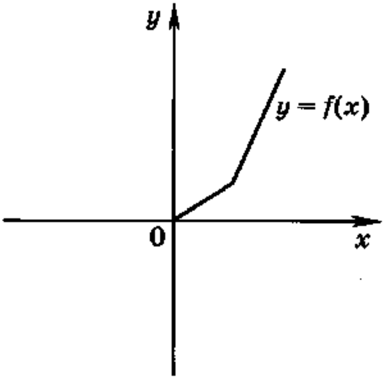


Рис. 18

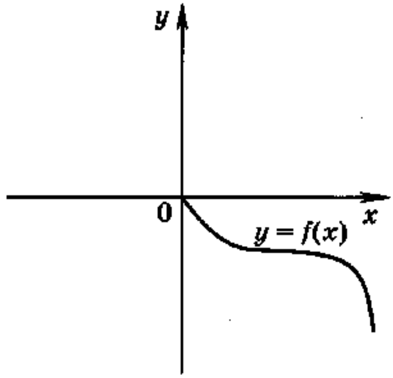


Рис. 19

11. $\boxed{4}$ Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Достроить её график на промежутке $[-\pi; 0]$, если часть её графика на отрезке $[0; \pi]$ изображена на рисунке 20 и известно, что функция $y = f(x)$ нечётная.

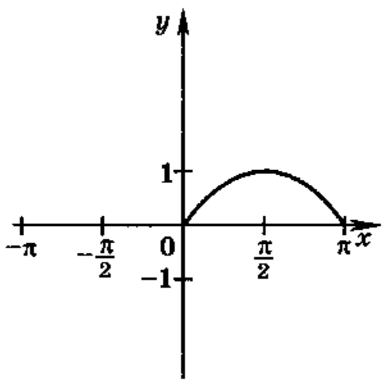


Рис. 20

Выяснить, является ли функция $g(x)$ чётной или нечётной (12—13).

12. $\boxed{5}$ $g(x) = f(x) - \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — нечётные функции.

13. $\boxed{5}$ $g(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — чётные функции.

Изобразить схематически график периодической функции, если на рисунке изображена часть графика на промежутке, длина которого равна наименьшему положительному периоду функции (14—15).

14. $\boxed{5}$ **15.** $\boxed{5}$

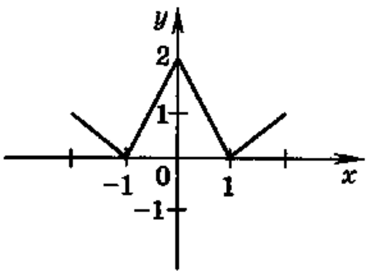


Рис. 21

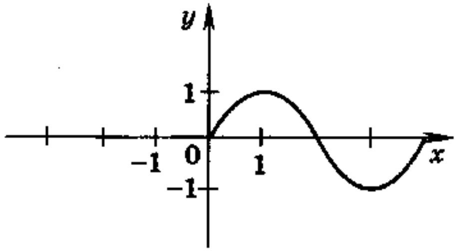


Рис. 22

16. $\boxed{5}$ Какие из функций

$$y = \sin 3x,\ y = x^3,\ y = \cos\sqrt{x-1}.\ y = \cos|x|$$

являются периодическими?

Доказать, что функция является периодической с периодом T (17—24).

17. $\boxed{4}$ $y = \cos 2x,\ T = \pi.$

18. $\boxed{4}$ $y = \sin\frac{3}{4}x,\ \ T = \frac{8\pi}{3}.$

19. $\boxed{5}$ $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right),\ \ T = \frac{2\pi}{3}.$

20. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{ctg}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right),\ \ T = \frac{\pi}{5}.$

21. $\boxed{6}$ $y = \sin 4x,\ T = \frac{\pi}{2}.$

22. $\boxed{6}$ $y = \cos\frac{5x}{6},\ \ T = \frac{12\pi}{5}.$

23. $\boxed{6}$ $y = \operatorname{tg}\frac{7x}{8},\ \ T = \frac{8\pi}{7}.$

24. $\boxed{7}$ $y = \sin 5x - \cos 5x,\ T = \frac{2\pi}{5}.$

25. $\boxed{7}$ Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом $T = 7$. На рисунке 23 изображён график этой функции при $-4 \leqslant x \leqslant 3$. Найти значение выражения $f(-5) + f(7) + f(-6)$.

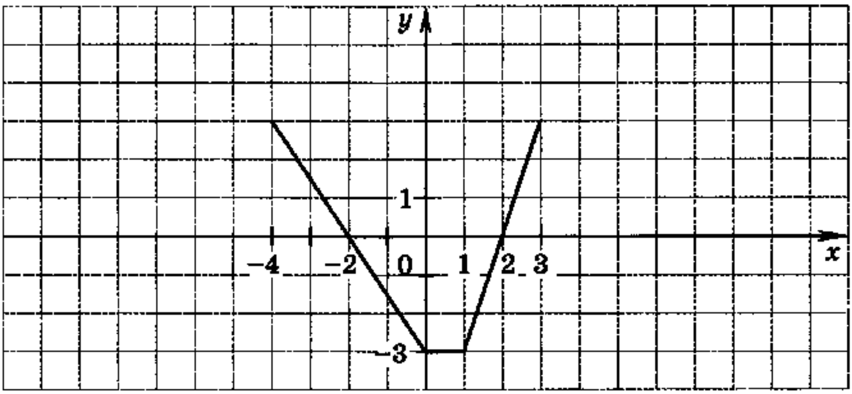


Рис. 23

26. $\boxed{7}$ Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом $T = 5$. На рисунке 24 изображён график этой функции при $-3 \leqslant x \leqslant 2$. Найти значение выражения $f(-5) - f(4) + f(6)$.

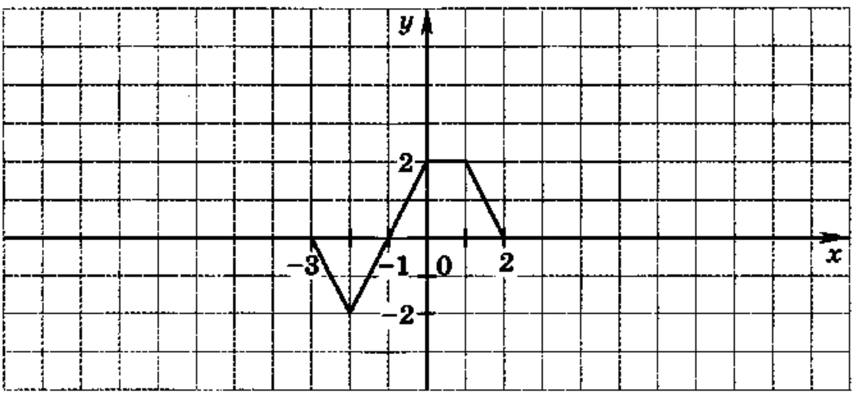


Рис. 24

§ 40. Свойства функции $y = \cos x$ и её график

Справочные сведения

Свойства функции $y = \cos x$

Область определения $\boldsymbol{R}$.

Множество значений $[-1;\ 1]$.

Функция периодическая; наименьший положительный период $T = 2\pi$.

Функция чётная: $\cos(-x) = \cos x$.

Функция принимает значения:

равные нулю при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

положительные при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 25);

отрицательные при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

наибольшее, равное 1, при $x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

наименьшее, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

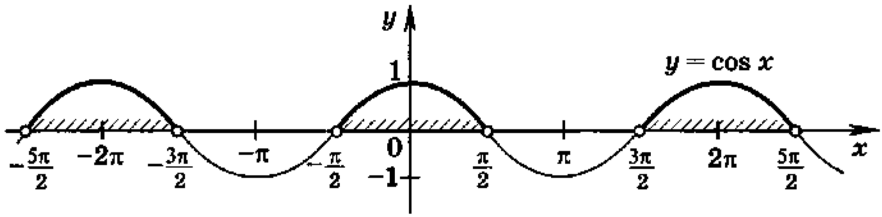


Рис. 25

Функция:

возрастает на отрезках $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi(n+1)]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 26);

убывает на отрезках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

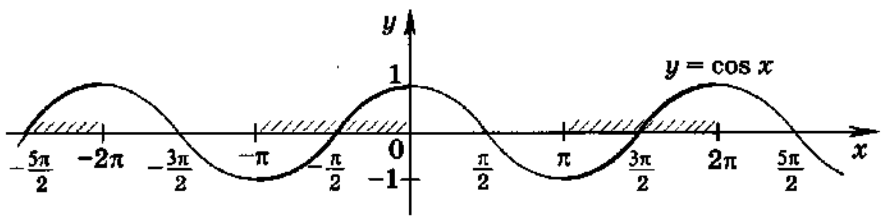


Рис. 26

Примеры с решениями

1. Найти все корни уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

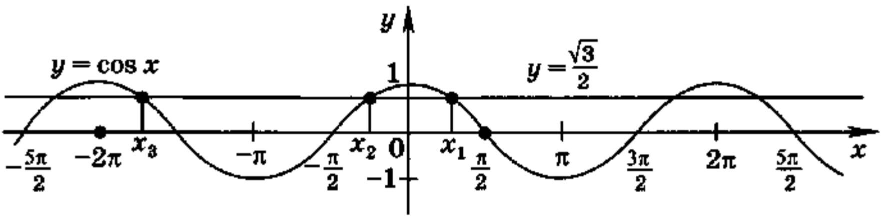


Рис. 27

Решение. Построим график функции $y = \cos x$ и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 27). На заданном отрезке прямая и график функции $y = \cos x$ пересекаются в трёх точках, имеющих следующие абсциссы: $x_1 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ $(x_1 \in [0; \pi])$, $x_2 = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}$ (симметрична точке x_1 относительно оси Oy), $x_3 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$ (x_3 находится на том же расстоянии от -2π, что и x_1 от точки 0, так как период функции $y = \cos x$ равен 2π). Следовательно, на заданном отрезке уравнение имеет три корня: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{\pi}{6}$, $x_3 = -\frac{11\pi}{6}$.

2. Найти все решения неравенства $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. Построим график функции $y = \cos x$ и прямую $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 28).

На заданном отрезке график функции $y = \cos x$ лежит ниже прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при всех $x_1 < x < x_2$, $x_3 < x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, где $x_1 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$, $x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$.

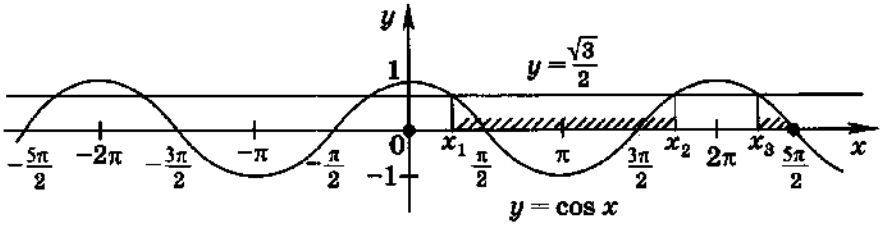


Рис. 28

Решениями неравенства на заданном отрезке являются промежутки $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

3. Сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{3}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$;   2) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\cos\frac{5\pi}{3}$;

3) $\cos\frac{7\pi}{5}$ и $\sin\frac{8\pi}{5}$.

Решение.

1) Так как на промежутке $[0; \pi]$ функция $y=\cos x$ убывает, то $\cos\frac{\pi}{3} < \cos\frac{\pi}{7}$.

2) По формуле приведения $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$.

На отрезке $[0; \pi]$ функция $y=\cos x$ убывает, и, значит, $\cos\frac{\pi}{6} > \cos\frac{\pi}{3}$, откуда $\cos\frac{\pi}{6} > \cos\frac{5\pi}{3}$.

3) По формулам приведения

$$\sin\frac{8\pi}{5} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\frac{\pi}{10};$$

$$\cos\frac{7\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Так как на отрезке $[0; \pi]$ функция убывает, то $\cos\frac{\pi}{10} > \cos\frac{2\pi}{5}$, $-\cos\frac{\pi}{10} < -\cos\frac{2\pi}{5}$.

Следовательно, $\sin\frac{8\pi}{5} < \cos\frac{7\pi}{5}$.

4. Построить график функции: 1) $y = 2\cos x$; 2) $y = |\cos x|$.

Решение.

1) Сначала построим график функции $y=\cos x$, а затем умножим на 2 ординаты всех его точек (рис. 29).

Действительно, например, если $x = 2\pi$, то $\cos 2\pi = 1$, а $2\cos 2\pi = 2$; если $x = \pi$, то $\cos \pi = -1$, а $2\cos \pi = -2$; если $x = \frac{\pi}{2}$, то $\cos \frac{\pi}{2} = 2\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

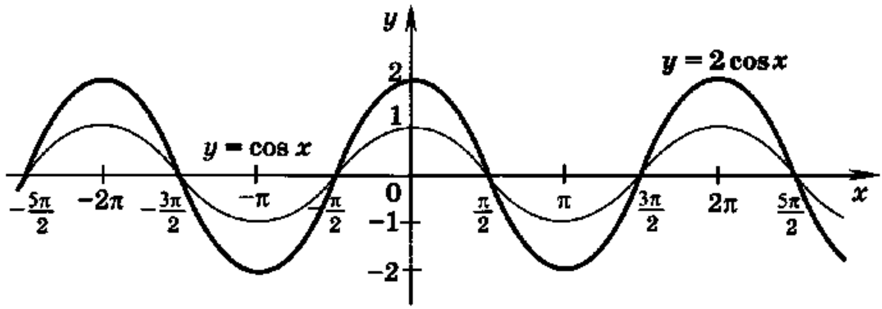


Рис. 29

2) При всех значениях x функция $y = |\cos x|$ принимает неотрицательные значения. График функции $y = |\cos x|$ можно получить из графика функции $y = \cos x$ симметричным отражением относительно оси Ox той его части, где $\cos x < 0$ (рис. 30).

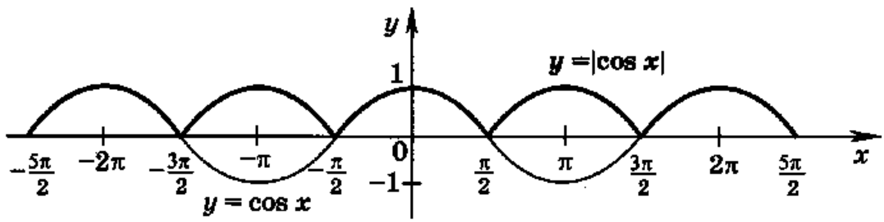


Рис. 30

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{1}$ С помощью графика функции $y = \cos x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$:

1) функция возрастает, убывает;
2) значение функции равно нулю;
3) функция принимает наибольшее, наименьшее значения;
4) функция принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{4}$ Ответить на те же вопросы, используя график функции $y = \cos 2x$, изображённый на рисунке 31.

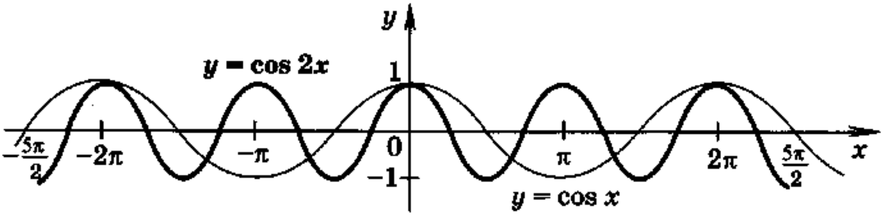


Рис. 31

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y = \cos x$ возрастающей на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$?

Сравнить числа (4—6).

4. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

5. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

6. $\boxed{2}$ $\cos \pi$ и $\cos \frac{3\pi}{10}$.

С помощью графика функции $y = \cos x$ найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку (7—8).

7. $\boxed{4}$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

8. $\boxed{4}$ $\cos x = \frac{1}{2}$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

С помощью графика функции $y = \cos x$ найти решения неравенства, принадлежащие данному промежутку (9—11).

9. $\boxed{5}$ $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

10. $\boxed{5}$ $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$, $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

11. $\boxed{5}$ $\cos x \leqslant -1$, $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Сравнить числа (12—15).

12. $\boxed{4}$ $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ и $\cos \frac{7\pi}{4}$.

13. $\boxed{4}$ $\cos \frac{3\pi}{4}$ и $\sin \frac{3\pi}{8}$.

14. $\boxed{5}$ $\cos 0{,}8$ и $\cos 2{,}8$.

15. $\boxed{5}$ $\cos(-2)$ и $\cos(-0{,}2)$.

Построить график функции (16—17).

16. $\boxed{5}$ $y = \cos x - 1,5$.

17. $\boxed{5}$ $y = \cos x + 2$.

Найти множество значений функции (18—19).

18. $\boxed{5}$ $y = 3\cos x$.

19. $\boxed{5}$ $y = \cos \frac{1}{2} x$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает отрицательные значения; 2) убывает (20—22).

20. $\boxed{5}$ $y = -\cos x$.

21. $\boxed{5}$ $y = 3\cos x$.

22. $\boxed{7}$ $y = |4\cos x|$.

С помощью графиков функций выяснить, сколько корней имеет данное уравнение (23—24).

23. $\boxed{5}$ $\cos x = \frac{x}{7}$.

24. $\boxed{8}$ $\cos 2x = \lg x$.

25. $\boxed{8}$ **Исследовать функцию $y = 2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ и построить её график.**

Вариант II

1. $\boxed{1}$ **С помощью графика функции $y = \cos x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$:**

1) функция возрастает, убывает;
2) значение функции равно нулю;
3) функция принимает наибольшее, наименьшее значения;
4) функция принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{4}$ **Ответить на те же вопросы, используя график функции $y = \cos \frac{x}{2}$, изображённый на рисунке 32.**

Рис. 32

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y = \cos x$ возрастающей на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$?

Сравнить числа (4—6).

4. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

5. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$.

6. $\boxed{2}$ $\cos(-\pi)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

С помощью графика функции $y = \cos x$ найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку (7—8).

7. $\boxed{5}$ $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

8. $\boxed{5}$ $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

С помощью графика функции $y = \cos x$ найти решения неравенства, принадлежащие данному промежутку (9—11).

9. $\boxed{5}$ $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

10. $\boxed{5}$ $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

11. $\boxed{5}$ $\cos x \geqslant 1$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Сравнить числа (12—15).

12. $\boxed{4}$ $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ и $\cos\frac{3\pi}{4}$.

13. $\boxed{4}$ $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

14. $\boxed{5}$ $\cos 6{,}5$ и $\cos 7{,}5$.

15. $\boxed{5}$ $\cos(-3)$ и $\cos(-2{,}5)$.

Построить график функции (16—17).

16. $\boxed{5}$ $y = \cos x + 1$.

17. $\boxed{5}$ $y = \cos x - 0{,}5$.

Найти множество значений функции (18—19).

18. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{2}\cos x$.

19. $\boxed{5}$ $y = \cos 3x$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает отрицательные значения; 2) убывает (20—22).

20. $\boxed{5}$ $y = \cos(-x)$.

21. $\boxed{5}$ $y = 4\cos x$.

22. $\boxed{7}$ $y = |3\cos x|$.

С помощью графиков функций выяснить, сколько корней имеет данное уравнение (**23—24**).

23. $\boxed{5}$ $\cos x = \frac{x}{8}$.

24. $\boxed{8}$ $\cos 2x = \log_8 x$.

25. $\boxed{8}$ Исследовать функцию $y = 3\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ и построить её график.

§ 41. Свойства функции $y = \sin x$ и её график

Справочные сведения

Свойства функции $y = \sin x$

Область определения $\boldsymbol{R}$.

Множество значений $[-1;\ 1]$.

Функция периодическая; наименьший положительный период $T = 2\pi$.

Функция нечётная: $\sin(-x) = -\sin x$.

Функция принимает значения:

равные нулю при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

положительные при $2\pi n < x < \pi(2n + 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 33);

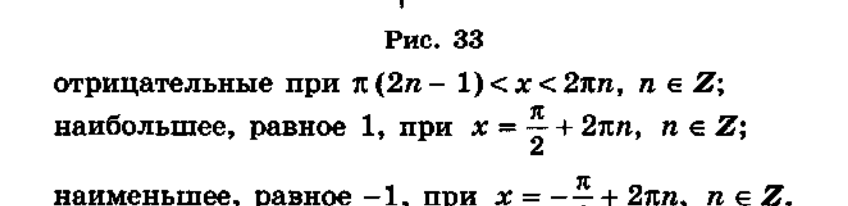


Рис. 33

отрицательные при $\pi(2n - 1) < x < 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

наибольшее, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

наименьшее, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Функция:

возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 34);

убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

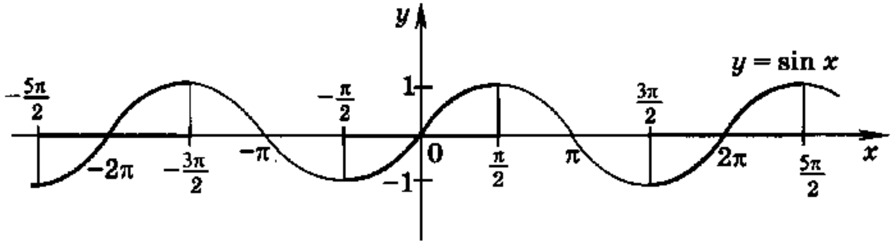


Рис. 34

Примеры с решениями

1. Найти решения неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Решение. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = -\frac{1}{2}$, (рис. 35). На заданном промежутке прямая $y = -\frac{1}{2}$ и синусоида пересекаются в трёх точках, имеющих следующие абсциссы: $x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $\left(-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ и $x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ (x_3 находится на том же расстоянии от 2π, что и x_1 от точки 0, так как период функции $y = \sin x$ равен 2π). При этом синусоида лежит ниже прямой $y = -\frac{1}{2}$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < x_1$, $x_2 < x < x_3$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < -\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$. Эти промежутки и образуют множество решений неравенства на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

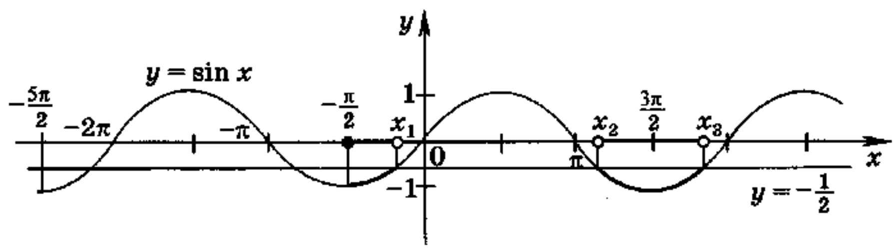


Рис. 35

2. Сравнить числа:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$; 2) $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\sin\left(-\frac{11\pi}{8}\right)$;

3) $\sin\frac{5\pi}{6}$ и $\cos\frac{15\pi}{8}$.

Решение.

1) Так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает, то $\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$.

2) Воспользуемся нечётностью функции $y = \sin x$ и формулами приведения:

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{8}\right) = -\sin\frac{11\pi}{8} = -\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8}.$$

Так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает, то $\sin\frac{3\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{8}$, и, следовательно, $\sin\frac{\pi}{8} < \sin\left(-\frac{11\pi}{8}\right)$.

3) По формулам приведения $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$;

$$\cos\frac{15\pi}{8} = \cos\left(\frac{12\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8}.$$

Так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает, то $\sin\frac{3\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{6}$, и, следовательно, $\sin\frac{5\pi}{6} < \cos\frac{15\pi}{8}$.

3. Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{2}\sin x$; 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \sin|x|$.

Решение.

1) Для построения графика функции $y = \frac{1}{2}\sin x$ (рис. 36) сначала построим график функции $y = \sin x$, а затем ординаты всех его точек разделим на 2 (умножим на $\frac{1}{2}$). Например, если $x = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, а $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$;

если $x = -\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, а $\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$; если $x = 0$, то $\sin 0 = \frac{1}{2}\sin 0 = 0$.

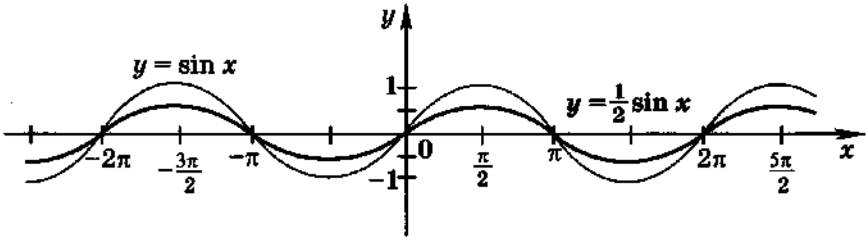


Рис. 36

2) Для построения графика функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ нужно график функции $y = \sin x$ сдвинуть на $\frac{\pi}{4}$ вправо (рис. 37). Например, $\sin x = 0$ при $x = \pi$, а $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ при $x - \frac{\pi}{4} = \pi$, т. е. при $x = \pi + \frac{\pi}{4}$; $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$ а $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ при $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $x = \frac{3\pi}{4}$; $\sin x = -1$ при $x = \frac{3\pi}{2}$, а $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ при $x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, т. е. при $x = \frac{7\pi}{4}$.

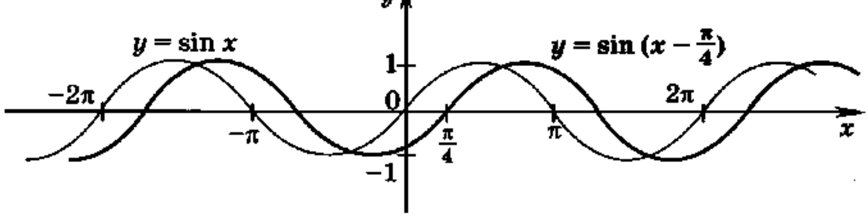


Рис. 37

3) Согласно правилу построения графика функции $y = f(|x|)$ нужно сохранить часть графика для $x \geqslant 0$ и от-

разить её симметрично относительно оси Oy (часть графика для $x<0$ отбрасывается). Получим график, изображённый на рисунке 38.

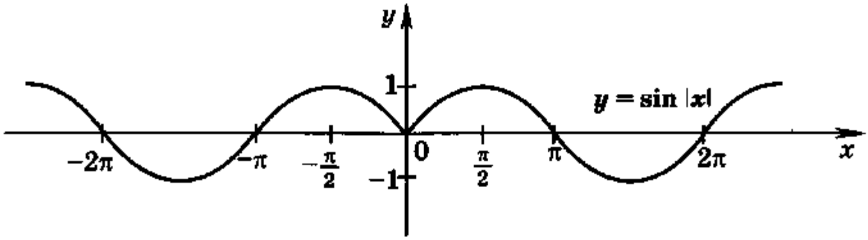


Рис. 38

Например, при $x=-\frac{\pi}{4}$ имеем $\sin\left|-\frac{\pi}{4}\right|=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; при $x=-\frac{\pi}{2}$ имеем $\sin\left|-\frac{\pi}{2}\right|=\sin\frac{\pi}{2}=1$; при $x=-\frac{3\pi}{2}$ имеем $\sin\left|-\frac{3\pi}{2}\right|=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{1}$ С помощью графика функции $y=\sin x$ выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, функция:

   1) возрастает, убывает;
   2) принимает значения, равные нулю;
   3) принимает положительные, отрицательные значения;
   4) принимает наибольшее, наименьшее значения.

2. $\boxed{4}$ Ответить на те же вопросы, используя график функции $y=\sin\frac{x}{2}$, изображённый на рисунке 39.

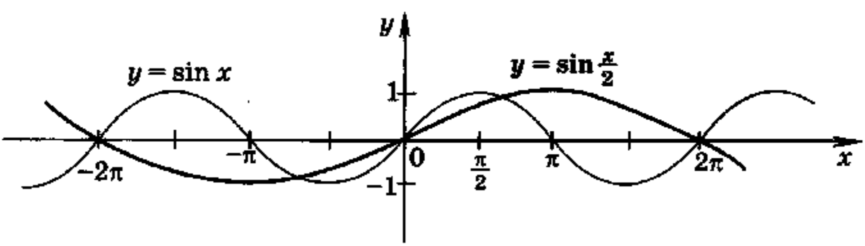


Рис. 39

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y = \sin x$ возрастающей на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$?

Найти все решения неравенства на заданном отрезке (4—6).

4. $\boxed{5}$ $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

5. $\boxed{5}$ $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi; 2\pi]$.

6. $\boxed{5}$ $\sin x \leqslant -1$, $[-2\pi; 2\pi]$.

Сравнить числа (7—14).

7. $\boxed{2}$ $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{2\pi}{5}$.

8. $\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

9. $\boxed{2}$ $\sin\pi$ и $\sin\frac{7\pi}{4}$.

10. $\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{11\pi}{10}\right)$ и $\sin\frac{\pi}{15}$.

11. $\boxed{5}$ $\sin\frac{4\pi}{9}$ и $\cos\frac{17\pi}{11}$.

12. $\boxed{5}$ $\sin 0{,}3$ и $\sin 3{,}4$.

13. $\boxed{5}$ $\sin(-2)$ и $\sin(-5)$.

14. $\boxed{5}$ $\sin(-0{,}5)$ и $\cos(-6)$.

Расположить числа в порядке возрастания (15—16).

15. $\boxed{6}$ $\sin 1$; $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; $\sin 1{,}5$.

16. $\boxed{6}$ $\sin 3$; $\cos 0{,}1$; $\sin(-1{,}5)$.

Найти множество значений функции (17—18).

17. $\boxed{6}$ $y = \sin 2x - 1$.

18. $\boxed{6}$ $y = 3\sin x + 1$.

Построить график функции (19—20).

19. $\boxed{5}$ $y = \sin x + 2$.

20. $\boxed{5}$ $y = \sin x - 0{,}5$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает (21—24).

21. $\boxed{5}$ $y = \sin(-x)$.

22. $\boxed{5}$ $y = 2\sin x$.

23. $\boxed{6}$ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

24. $\boxed{6}$ $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

Построить график функции (25—28).

25. $\boxed{6}$ $y = 0{,}5\sin|x|$. **26.** $\boxed{7}$ $y = |2\sin x|$.

27. $\boxed{7}$ $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. **28.** $\boxed{8}$ $y = \sin x + \cos x$.

С помощью графиков функций выяснить, сколько корней имеет уравнение (29—30).

29. $\boxed{5}$ $\sin x = \frac{x}{8}$. **30.** $\boxed{7}$ $\sin x = \log_{0,1}x$.

Вариант II

1. $\boxed{1}$ С помощью графика функции $y = \sin x$ выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$, функция:

1) возрастает, убывает;
2) принимает значения, равные нулю;
3) принимает положительные, отрицательные значения;
4) принимает наибольшее, наименьшее значения.

2. $\boxed{4}$ Ответить на те же вопросы, используя график функции $y = \sin 2x$, изображённый на рисунке 40.

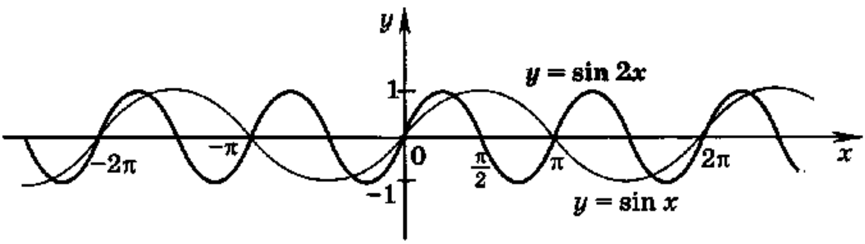


Рис. 40

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y = \sin x$ убывающей на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$?

Найти все решения неравенства на заданном отрезке (4—6).

4. $\boxed{5}$ $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

5. $\boxed{5}$ $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$. 6. $\boxed{5}$ $\sin x \geqslant 1$, $[-2\pi;\ 2\pi]$.

Сравнить числа (7—14).

7. $\boxed{2}$ $\sin 0{,}2\pi$ и $\sin \frac{3\pi}{11}$. 8. $\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$.

9. $\boxed{2}$ $\sin 2\pi$ и $\sin \frac{3\pi}{4}$. 10. $\boxed{4}$ $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$.

11. $\boxed{5}$ $\cos \frac{5\pi}{6}$ и $\sin \frac{13\pi}{10}$. 12. $\boxed{5}$ $\sin 4$ и $\sin 6{,}5$.

13. $\boxed{5}$ $\sin(-1)$ и $\sin(-4)$. 14. $\boxed{5}$ $\cos(-0{,}7)$ и $\sin(-0{,}8)$.

Расположить числа в порядке возрастания (15—16).

15. $\boxed{6}$ $\sin 6$; $\sin(-4{,}5)$; $\sin \frac{\pi}{12}$.

16. $\boxed{6}$ $\sin 1$; $\cos 3$; $\sin(-0{,}1)$.

Найти множество значений функции (17—18).

17. $\boxed{6}$ $y = 1 - \sin \frac{1}{2}x$. 18. $\boxed{6}$ $y = \frac{1}{3}\sin x + 1$.

Построить график функции (19—20).

19. $\boxed{5}$ $y = \sin x - 1$. 20. $\boxed{5}$ $y = \sin x + 3$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает (21—24).

21. $\boxed{5}$ $y = -\sin x$. 22. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{3}\sin x$.

23. $\boxed{6}$ $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 24. $\boxed{6}$ $y = -2\sin x$.

Построить график функции (25—28).

25. $\boxed{6}$ $y = 3\sin|x|$. 26. $\boxed{7}$ $y = \left|\frac{1}{3}\sin x\right|$.

27. $\boxed{7}$ $y = \frac{1}{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 28. $\boxed{8}$ $y = \sin x - \cos x$.

С помощью графиков функций выяснить, сколько корней имеет уравнение (29—30).

29. $\boxed{5}$ $\sin x = \frac{x}{9}$. 30. $\boxed{7}$ $\sin x = \lg x$.

§ 42. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и её график

Справочные сведения

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

Область определения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Множество значений $\boldsymbol{R}$.

Функция периодическая; наименьший положительный период $T = \pi$.

Функция нечётная.

Функция принимает значения:

равные нулю при $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

положительные при $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

отрицательные при $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

Функция возрастает при $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Рис. 41

Примеры с решениями

1. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = -3$, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

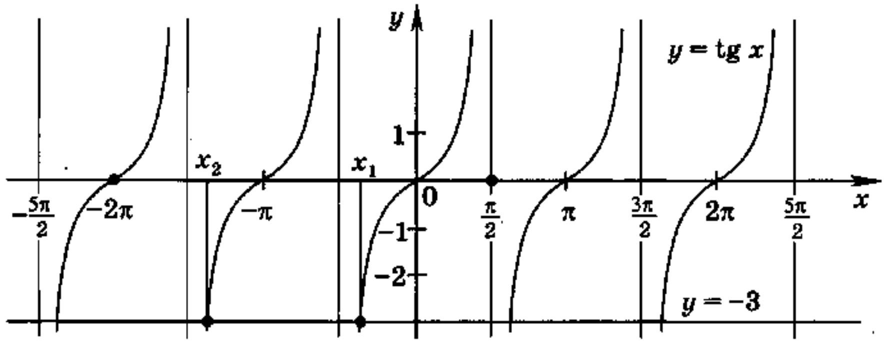


Рис. 42

Решение. Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -3$ (рис. 42).

На заданном отрезке $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ тангенсоида и прямая имеют две точки пересечения с абсциссами $x_1 = \operatorname{arctg}(-3) = -\operatorname{arctg} 3 \left(x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$ и $x_2 = -\pi - \operatorname{arctg} 3$.

Следовательно, на данном отрезке уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\operatorname{arctg} 3, \ x_2 = -\operatorname{arctg} 3 - \pi.$$

2. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \geqslant -3$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

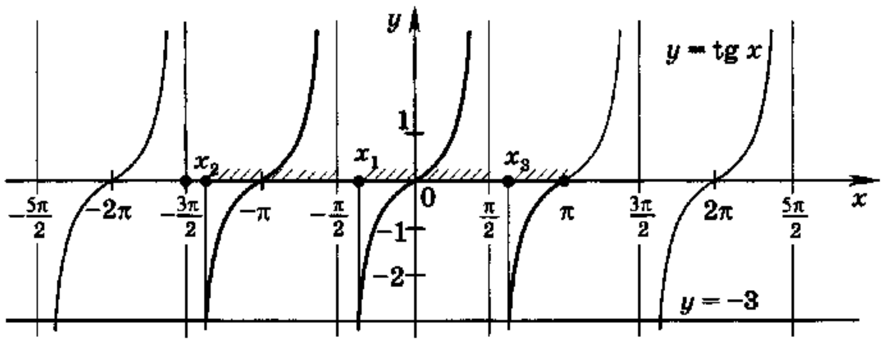


Рис. 43

Решение. Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = -3$ (рис. 43). На заданном отрезке прямая пересекает тангенсоиду в трёх точках с абсциссами $x_1 = \operatorname{arctg}(-3) = -\operatorname{arctg} 3$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 - \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi = -\operatorname{arctg} 3 + \pi$. При этом график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не ниже прямой $y = -3$ при $x_2 \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $x_1 \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $x_3 \leqslant x \leqslant \pi$. Следовательно, решениями неравенства $\operatorname{tg} x \geqslant -3$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$ являются следующие: $-\operatorname{arctg} 3 - \pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\pi - \operatorname{arctg} 3 \leqslant x \leqslant \pi$.

3. Сравнить числа:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{20}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$.

Решение.

1) Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $-\frac{\pi}{8} > -\frac{3\pi}{20}$, то $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) > \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{20}\right)$.

2) По формуле приведения $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$. Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, имеем $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, и, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$.

3) По формулам приведения и свойству нечётности функции $y = \operatorname{tg} x$ запишем

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, а значит, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right) > \operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$.

4. Построить график функции $y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$.

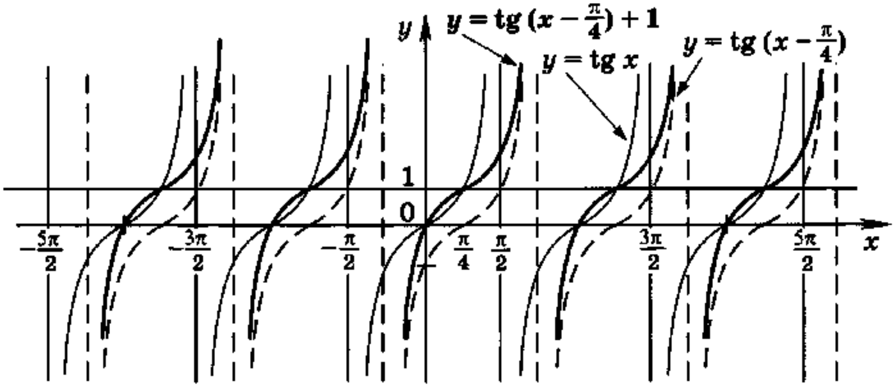


Рис. 44

Решение. Для построения графика заданной функции сдвинем график функции $y = \text{tg}\, x$ на $\dfrac{\pi}{4}$ вправо и полученный график перенесём на 1 вверх (рис. 44).

Область определения функции — множество всех значений x, при которых $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$, т. е. $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Так как период заданной функции равен π, то можно найти несколько контрольных точек на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Например, если $x = 0$, то $\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; если $x = \dfrac{\pi}{4}$, то $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 1$; если $x = \dfrac{\pi}{2}$, то $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 2$ и т. д.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{1}$ С помощью графика функции $y = \text{tg}\, x$ выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[-\pi; 2\pi]$, данная функция:

1) возрастает, убывает;
2) принимает значения, равные нулю;
3) принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{3}$ С помощью графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ ответить на те же вопросы для всех x из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right)$.

Найти все решения уравнения на заданном промежутке (3—4).

3. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-\pi;\ \pi]$.

4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = -1$, $[0;\ 2\pi]$.

Найти все решения неравенства на заданном промежутке (5—7).

5. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$, $[-\pi;\ \pi]$.

6. $\boxed{5}$ $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

7. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x > 3$, $[0;\ 2\pi]$.

Решить неравенство (8—9).

8. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. $\boxed{6}$ $\operatorname{ctg} x < 1$.

Сравнить числа (10—14).

10. $\boxed{2}$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$.

11. $\boxed{2}$ $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$.

12. $\boxed{3}$ $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ и $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{8}$.

13. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$.

14. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} 1{,}8$ и $\operatorname{tg}(-2)$.

Расположить числа в порядке убывания (15—16).

15. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{14}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$.

16. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} 3$; $\operatorname{tg} 1{,}8$; $\operatorname{tg} 2$; $\operatorname{tg} 1{,}5$.

Найти область определения функции (17—18).

17. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{tg} 2x$.

18. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

Выяснить, является ли функция чётной или нечётной, и построить её график (19—20).

19. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{tg} x - 0{,}5$.

20. $\boxed{6}$ $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает (21—22).

21. $\boxed{6}$ $y = -\operatorname{ctg} x$.

22. $\boxed{7}$ $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Построить график функции (23—24).

23. $\boxed{6}$ $y = \operatorname{tg}|x|$.

24. $\boxed{7}$ $y = 2\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант II

1. $\boxed{1}$ С помощью графика функции $y = \operatorname{tg} x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left(-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$ данная функция:
1) возрастает, убывает;
2) принимает значения, равные нулю;
3) принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{3}$ С помощью графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ ответить на те же вопросы для всех x из промежутка $(-\pi;\ 2\pi)$.

Найти все решения уравнения на заданном промежутке (3—4).

3. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = 1$, $[0;\ 2\pi]$.

4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-2\pi;\ 0]$.

Найти все решения неравенства на заданном промежутке (5—7).

5. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$, $\left(-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

6. $\boxed{5}$ $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$, $\left(-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

7. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x < 3$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right)$.

Решить неравенство (8—9).

8. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. $\boxed{6}$ $\operatorname{ctg} x > 1$.

Сравнить числа (10—14).

10. $\boxed{2}$ $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ и $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{11}$.

11. $\boxed{2}$ $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$.

12. $\boxed{3}$ $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{9}$.

13. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{10}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{12\pi}{11}\right)$.

14. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg}(-0{,}7)$ и $\operatorname{tg} 4$.

Расположить числа в порядке убывания (15—16).

15. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{15}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$.

16. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} 3$; $\operatorname{tg} 4$; $\operatorname{tg} 0{,}5$; $\operatorname{tg} 1{,}49$.

Найти область определения функции (17—18).

17. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{tg} 3x$.

18. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$.

Выяснить, является ли функция чётной или нечётной, и построить её график (19—20).

19. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{tg} x + 0{,}5$.

20. $\boxed{6}$ $y = 2\operatorname{tg} x$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает (21—22).

21. $\boxed{6}$ $y = -\operatorname{tg} x$.

22. $\boxed{7}$ $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Построить график функции (23—24).

23. $\boxed{6}$ $y = \operatorname{ctg}|x|$.

24. $\boxed{7}$ $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Контрольная работа № 1

Вариант I

1. Найти область определения и множество значений функции $y = 2\cos x$.
2. Выяснить, является ли функция $y = \sin x - \operatorname{tg} x$ чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной.
3. Изобразить схематически график функции $y = \sin x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

---

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3\sin x\ \cos x + 1$.
5. Построить график функции $y = 0{,}5\cos x - 2$. При каких значениях x функция возрастает? убывает?

Вариант II

1. Найти область определения и множество значений функции $y = 0{,}5\cos x$.
2. Выяснить, является ли функция $y = \cos x - x^2$ чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной.
3. Изобразить схематически график функции $y = \cos x - 1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

---

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1}{3}\cos^2 x - \frac{1}{3}\sin^2 x + 1$.
5. Построить график функции $y = 2\sin x + 1$. При каких значениях x функция возрастает? убывает?

Задания для подготовки к экзамену

1. $\boxed{5}$ Найти множество значений функции $y = -\dfrac{\cos 0{,}2x}{2}$.

   Ответ. $[-0{,}5;\ 0{,}5]$.

2. $\boxed{5}$ Найти множество значений функции $y = \sin x + 2$. Ответ. $[1;\ 3]$.

3. $\boxed{5}$ Найти множество значений функции $y = 2 - \sin^2 x$. Ответ. $[1;\ 2]$.

4. $\boxed{7}$ Найти множество значений функции

   $y = \dfrac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}\,(\cos x - \sin x)\right)$. Ответ. $[1;\ 2]$.

5. $\boxed{8}$ Найти множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in [\operatorname{arctg} 0{,}5;\ \operatorname{arctg} 3]$. Ответ. $[0{,}6;\ 1]$.

6. $\boxed{8}$ Найти множество значений функции $y = \cos 2x$, если $x \in \left[-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3};\ \operatorname{arctg} 2\right]$. Ответ. $[-0{,}6;\ 1]$.

7. $\boxed{8}$ Найти множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in \left[\arccos\dfrac{5}{13};\ \dfrac{5\pi}{12}\right]$. Ответ. $\left[0{,}5;\ \dfrac{120}{169}\right]$.

8. $\boxed{9}$ При каких значениях a сумма выражений

   $$\log_a(\sin x + 2) \text{ и } \log_a(\sin x + 3)$$

   равна 1 хотя бы при одном значении x?

   Ответ. $2 \leqslant a \leqslant 12$.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1—2).

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

Решение. Пусть $t = \cos x$, тогда $|t| \leqslant 1$ и $f(t) = \dfrac{1}{\varphi(t)}$, где $\varphi(t) = 1 - t^2 + t + 2 = 3 - t^2 + t = \dfrac{13}{4} - \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

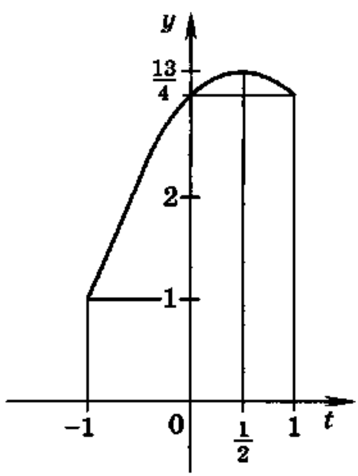


Рис. 45

На рисунке 45, где изображён график функции $y = \varphi(t)$, на отрезке $[-1; 1]$ видно, что $\varphi(-1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, т. е. $1 \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{13}{4}$. Следовательно, $\frac{4}{13} \leqslant \frac{1}{\varphi(t)} \leqslant 1$, т. е. $\frac{4}{13} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Ответ. 1 и $\frac{4}{13}$.

2. $f(x) = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

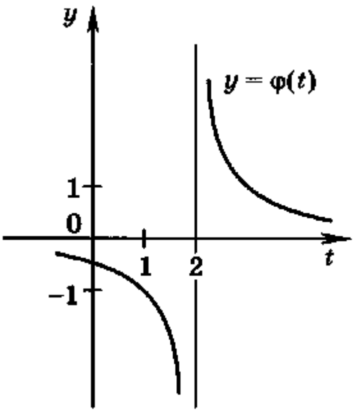


Рис. 46

Решение. Воспользуемся тригонометрическими тождествами, получим

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \times (\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Положим $t = \sin^2 2x$. Тогда

$$f(x) = \frac{1 - \frac{3}{4}t}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{3t - 4}{2(t - 2)} = \frac{(3t - 6) + 2}{2(t - 2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{t - 2},$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Функция $y = \varphi(t) = \frac{1}{t - 2}$, график которой изображён на рисунке 46, убывает на отрезке $[0; 1]$, и потому $\varphi(1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(0)$, т. е. $-1 \leqslant \varphi(t) \leqslant -\frac{1}{2}$, откуда следует, что $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Ответ. 1 и $\frac{1}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1—3).

1. $f(x)=\dfrac{2\sin^4 x+3\cos^2 x}{2\cos^4 x+\sin^2 x}$. Ответ. $\dfrac{15}{7}$ и $\dfrac{3}{2}$.

2. $f(x)=\dfrac{2\cos^4 x+\sin^2 x}{2\sin^4 x+3\cos^2 x}$. Ответ. $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{7}{15}$.

3. $f(x)=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}$. Ответ. 2 и 1.

Исследовать функцию и построить её график (4—34).

4. $y=\cos 3x$.
5. $y=\sin 2x$.
6. $y=2\sin 3x$.
7. $y=3\cos 2x$.
8. $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
9. $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$.
10. $y=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.
11. $y=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.
12. $y=\sin x+|\sin x|$.
13. $y=\sin x\operatorname{ctg} x$.
14. $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.
15. $y=\sqrt{\cos x}$.
16. $y=\cos^2 2x$.
17. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.
18. $y=|\sin x-\cos x|$.
19. $y=\dfrac{|\sin x|}{\cos x}$.
20. $y=\dfrac{\cos x}{|\sin x|}$.
21. $y=\dfrac{1}{\cos x}$.
22. $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
23. $y=x\sin x$.
24. $y=\sin|x|$.
25. $y=|\sin|x||$.
26. $y=\log_2\cos x$.
27. $y=\sqrt{\log_2\sin x}$.
28. $y=\arcsin x$.
29. $y=\arccos x$.
30. $y=\operatorname{arctg} x$.
31. $y=\sin(\arcsin x)$.
32. $y=\arcsin(\sin x)$.
33. $y=\cos(\arccos(-x))$.
34. $y=\arccos(\cos x)$.

35. Доказать, что функция $y=\sin x^2$ не является периодической.

36. Доказать, что при всех $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{16}\leqslant\sin^{10}x+\cos^{10}x\leqslant 1.$$

Глава VIII. Производная и её геометрический смысл

§ 44. Производная

Справочные сведения

Производная функции $f(x)$ в точке x обозначается $f'(x)$ и определяется формулой

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то эта функция называется *дифференцируемой в точке* x_0.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то функция называется *дифференцируемой на этом промежутке.*

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если C — заданное число, то $C'=0$.

Формула производной линейной функции:

$$(kx+b)'=k.$$

Примеры с решениями

1. Найти $f(x+h)$, если:

1) $f(x)=\sqrt{x}$; 2) $f(x)=x^2+1$; 3) $f(x)=(x+1)^2$.

Решение.

1) $f(x+h)=\sqrt{x+h}$;

2) $f(x+h)=(x+h)^2+1$;

3) $f(x+h)=(x+h+1)^2$.

2. Используя определение производной, найти производную функции $f(x)=x^2-3x$.

Решение. Составим разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ для заданной функции:

$$\frac{((x+h)^2-3(x+h))-(x^2-3x)}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}=$$

$$=\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\frac{h(2x+h-3)}{h}=2x-3+h.$$

Если $h \to 0$, то $2x - 3 + h \to 2x - 3$, следовательно,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x - 3 + h) = 2x - 3.$$

Ответ. $(x^2 - 3x)' = 2x - 3$.

3. Найти производную функции $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

Решение. По формуле производной линейной функции $\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)' = -\frac{1}{2}$.

4. Точка движется по закону $s(t) = t^2 + t$. Найти:

1) среднюю скорость движения точки за промежуток времени от $t = 2$ до $t + h = 6$;

2) мгновенную скорость движения;

3) скорость движения в момент времени $t = 7$.

Решение.

1) Средняя скорость за промежуток времени от t до $t + h$ находится по формуле

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}. \qquad (1)$$

По условию $s(t) = t^2 + t$, $t = 2$, $t + h = 6$, откуда $h = 6 - 2 = 4$, $s(2) = 2^2 + 2 = 6$, $s(6) = 6^2 + 6 = 42$.

По формуле (1) получим $v_{\text{ср}} = \frac{42 - 6}{4} = 9$.

2) Мгновенная скорость движения в момент времени t находится по формуле

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}. \qquad (2)$$

Поскольку $s(t) = t^2 + t$, имеем $s(t + h) = (t + h)^2 + (t + h) = t^2 + 2th + h^2 + t + h$. По формуле (2) получим

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{(t^2 + 2th + h^2 + t + h) - (t^2 + t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2th + h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0} (2t + h + 1) = 2t + 1.$$

3) Так как $v(t) = 2t + 1$, то $v(7) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Для заданной функции $f(x)$ найти $f(x + h)$ (1—2).

1. $\boxed{2}$ $f(x) = \lg(3x - 1)$. **2.** $\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \sin 2x$.

С помощью определения производной найти производную заданной функции (3—4).

3. $\boxed{3}$ $f(x) = 4x - 1$. **4.** $\boxed{4}$ $f(x) = 5x^2 - 3x$.

Найти $f'(x)$, используя формулу производной линейной функции (5—7).

5. $\boxed{1}$ $f(x) = 18x - 0{,}5$. **6.** $\boxed{2}$ $f(x) = -\dfrac{x}{3} + 8 - \pi$.

7. $\boxed{2}$ $f(x) = 15 - x\sqrt{2}$.

8. $\boxed{4}$ **Точка движется по закону $s(t) = 3t^2$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 3$ до $t + h = 5$.**

9. $\boxed{5}$ **Точка движется по закону $s(t) = \dfrac{t^2}{3}$. Найти мгновенную скорость движения и скорость движения в момент времени $t = 15$.**

Вариант II

Для заданной функции $f(x)$ найти $f(x + h)$ (1—2).

1. $\boxed{2}$ $f(x) = e^{2x+1}$. **2.** $\boxed{3}$ $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 3x^2$.

С помощью определения производной найти производную заданной функции (3—4).

3. $\boxed{3}$ $f(x) = 5x - 2$. **4.** $\boxed{4}$ $f(x) = 2x - 3x^2$.

Найти $f(x)$, используя формулу производной линейной функции (5—7).

5. $\boxed{1}$ $f(x) = 0{,}1x + 3$. **6.** $\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{2x}{3} - 7 + 2\pi$.

7. $\boxed{2}$ $f(x) = -4 + x\lg 2$.

8. $\boxed{4}$ Точка движется по закону $s(t)=\frac{t^2}{2}$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t=1$ до $t+h=5$.

9. $\boxed{5}$ Точка движется по закону $s(t)=0{,}1t^2$. Найти мгновенную скорость движения и скорость движения в момент времени $t=20$.

§ 45. Производная степенной функции

Справочные сведения

Производная степенной функции находится по формуле[1]

$$(x^p)'=px^{p-1}.$$

В частности,

$$(x)'=1,\quad (x^2)'=2x,\quad (x^3)'=3x^2,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\ (x\neq 0),\qquad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x>0).$$

Производная функции вида $f(x)=(kx+b)^p$ находится по формуле

$$((kx+b)^p)'=pk(kx+b)^{p-1}.$$

Пример с решением

Найти производную функции: 1) x^{12}; 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Решение.

1) $(x^{12})'=12x^{12-1}=12x^{11}$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)'=\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'=-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}-1}=-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$.

[1] Все приведённые в данной главе формулы справедливы при тех значениях входящих в них букв, при которых и левая, и правая части этих формул имеют смысл.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти производную функции (1—12).

1. $\boxed{1}$ x^8.
2. $\boxed{2}$ x^{-11}.
3. $\boxed{2}$ $x^{\frac{2}{3}}$.
4. $\boxed{2}$ $x^{-\frac{4}{5}}$.
5. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x^{10}}$.
6. $\boxed{3}$ $\sqrt[6]{x^5}$.
7. $\boxed{4}$ $\frac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$.
8. $\boxed{3}$ $(1-3x)^4$.
9. $\boxed{3}$ $(-5x)^3$.
10. $\boxed{3}$ $(4x-3)^{-6}$.
11. $\boxed{4}$ $\sqrt[3]{-5+2x}$.
12. $\boxed{5}$ $\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{x}{2}-3\right)^3}}$.

Найти $f'(x_0)$ (13—14).

13. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-3}$, $x_0=3$.
14. $\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{3-2x}$, $x_0=-11$.
15. $\boxed{4}$ При каких значениях x производная функции $f(x)=x^3$ равна 3?
16. $\boxed{5}$ Решить уравнение $f'(x)=f(x)$, если $f(x)=(x+1)^2$.

Найти такие значения x, при которых производная функции $f(x)$ принимает указанное значение (17—20).

17. $\boxed{3}$ $f(x)=x^2$, $f'(x)=3$.
18. $\boxed{4}$ $f(x)=(2x+3)^2$, $f'(x)=3$.
19. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-1}$, $f'(x)=-4$.
20. $\boxed{6}$ $f(x)=x^2-6x+9$, $f'(x)=0$.

Вариант II

Найти производную функции (1—12).

1. $\boxed{1}$ x^9.
2. $\boxed{2}$ x^{-12}.
3. $\boxed{2}$ $x^{\frac{4}{5}}$.
4. $\boxed{2}$ $x^{-\frac{2}{3}}$.
5. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x^{18}}$.
6. $\boxed{3}$ $\sqrt[4]{x}$.
7. $\boxed{4}$ $\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$.
8. $\boxed{3}$ $(2-5x)^4$.
9. $\boxed{3}$ $(-2x)^5$.

10. $\boxed{3}$ $(7x-1)^{-4}$. 11. $\boxed{4}$ $\sqrt[10]{-3+12x}$. 12. $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^5}}$.

Найти $f'(x_0)$ (13—14).

13. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-4},\ x_0=2$.

14. $\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{1-5x},\ x_0=-3$.

15. $\boxed{4}$ При каких значениях x производная функции $f(x)=x^5$ равна 5?

16. $\boxed{5}$ Решить уравнение $f(x)=f'(x)$, если $f(x)=(1-x)^2$.

Найти такие значения x, при которых производная функции $f(x)$ принимает указанное значение (17—20).

17. $\boxed{3}$ $f(x)=(x-3)^2,\ f'(x)=-3$.

18. $\boxed{4}$ $f(x)=(3x-2)^3,\ f'(x)=4$.

19. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-1},\ f'(x)=1$.

20. $\boxed{6}$ $f(x)=4x^2+4x+1,\ f'(x)=0$.

§ 46. Правила дифференцирования

Справочные сведения

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x),$$
$$(Cf(x))'=Cf'(x),$$
$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

Производная сложной функции $F(x)=f(g(x))$ находится по формуле $F'(x)=f'(y)\cdot g'(x)$, где $y=g(x)$, т. е. по формуле

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Примеры с решениями

1. Найти производную функции:

1) $x^7+x^{\frac{1}{3}}-5$; 2) $18x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $5x^2(x-1)$; 4) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{2-x}$.

Решение.

1) $\left(x^7+x^{\frac{1}{3}}-5\right)'=(x^7)'+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'-5'=7x^6+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$;

2) $\left(18x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 18\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = -12x^{-\frac{5}{3}};$

3) I способ.

$$(5x^2(x-1))' = 5((x^2)'(x-1) + x^2(x-1)') =$$
$$= 5(2x(x-1) + x^2\cdot 1) = 5(2x^2 - 2x + x^2) =$$
$$= 5(3x^2 - 2x) = 15x^2 - 10x;$$

II способ.

$$(5x^2(x-1))' = (5(x^3 - x^2))' = 5(3x^2 - 2x) = 15x^2 - 10x;$$

4) $$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2-x}\right)' = \frac{(\sqrt{x}+1)'(2-x) - (\sqrt{x}+1)(2-x)'}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(2-x) - (\sqrt{x}+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2 - x + 2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(2-x)^2} =$$

$$= \frac{2 - x + 2x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2-x)^2} = \frac{x + 2\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}(2-x)^2}.$$

2. Найти $f'(3)$, если $f(x) = (4-x)^5\sqrt{2x-2}$.

Решение.

$$f'(x) = \left((4-x)^5(2x-2)^{\frac{1}{2}}\right)' = ((4-x)^5)'(2x-2)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ (4-x)^5\left((2x-2)^{\frac{1}{2}}\right)' = 5\cdot(-1)(4-x)^4(2x-2)^{\frac{1}{2}} + (4-x)^5\times$$

$$\times\frac{1}{2}\cdot 2(2x-2)^{-\frac{1}{2}} = -5(4-x)^4(2x-2)^{\frac{1}{2}} + (4-x)^5(2x-2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$f'(3) = -5(4-3)^4(2\cdot 3-2)^{\frac{1}{2}} + (4-3)^5(2\cdot 3-2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -5\cdot 4^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}} = -10 + 0{,}5 = -9{,}5.$$

3. Найти производную функции $F(x) = \sqrt{x^3+5}$.

Решение. Пусть $f(y) = \sqrt{y}$, а $y = x^3 + 5$, тогда по формуле производной сложной функции находим

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot(x^3+5)' = \frac{1}{2\sqrt{x^3+5}}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти производную функции (1—15).

1. $\boxed{3}$ $x^3 + \dfrac{1}{x} - 1$.

2. $\boxed{2}$ $-0{,}5x^{12}$.

3. $\boxed{4}$ $16\sqrt{x} - 4x^2$.

4. $\boxed{4}$ $\dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5. $\boxed{4}$ $(x + 7)\,x^2$.

6. $\boxed{5}$ $\sqrt[4]{x}\left(x^4 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

7. $\boxed{5}$ $\sqrt{2x-1}\cdot(x^5 + 8)$.

8. $\boxed{5}$ $x\left(\dfrac{x}{4} - 1\right)^4$.

9. $\boxed{5}$ $\dfrac{2x+3}{2-3x}$.

10. $\boxed{5}$ $\dfrac{x^5}{3x+2}$.

11. $\boxed{5}$ $\dfrac{x^5 - x^3 + 1}{x-1}$.

12. $\boxed{5}$ $\dfrac{\frac{1}{2}x^4 - 1}{2x+1}$.

13. $\boxed{6}$ $\dfrac{5x^3}{(4-x)^2}$.

14. $\boxed{6}$ $\dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$.

15. $\boxed{7}$ $(4 - x)(x - 1)(4 + x)(x + 1)$.

16. $\boxed{5}$ Найти $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$, если $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2$.

17. $\boxed{6}$ Найти $f'(1)$, если $f(x) = 5(x^2 - 3)\sqrt[3]{x}$.

Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю (18—19).

18. $\boxed{6}$ $f(x) = (x - 3)^5\,(2x + 6)$.

19. $\boxed{6}$ $f(x) = (x - 4)^2\sqrt{x}$.

Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает положительные значения (20—21).

20. $\boxed{7}$ $f(x) = (x - 3)^5(2x + 6)$.

21. $\boxed{8}$ $f(x) = (x - 4)^2\sqrt{x}$.

Выяснить, при каких значениях x производная фу
$f(x)$ принимает отрицательные значения (22—24).

22. $\boxed{7}$ $f(x) = x^3 + 6x^2$.

23. $\boxed{8}$ $f(x) = -\dfrac{x}{x^2+4}$.

24. $\boxed{8}$ $f(x) = x(x+5)^{\frac{3}{2}}$.

Найти производную сложной функции (25—26).

25. $\boxed{7}$ $(6x-2)^2 - 3(6x-2)$.

26. $\boxed{8}$ $\sqrt[5]{(1+x^3)^2}$, где $x \neq -1$.

Вариант II

Найти производную функции (1—15).

1. $\boxed{3}$ $x^2 - \dfrac{1}{x} + 3$.

2. $\boxed{2}$ $-\dfrac{1}{3}x^{15}$.

3. $\boxed{4}$ $-2x^3 + 12\sqrt{x}$.

4. $\boxed{4}$ $\dfrac{7}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{3}{x}$.

5. $\boxed{4}$ $(x-6)x^3$.

6. $\boxed{5}$ $\sqrt{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

7. $\boxed{5}$ $\sqrt{6x+1}\cdot(x^4-5)$.

8. $\boxed{5}$ $x\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^3$.

9. $\boxed{5}$ $\dfrac{2x+3}{3-2x}$.

10. $\boxed{5}$ $\dfrac{x^3}{2x-3}$.

11. $\boxed{5}$ $\dfrac{x^4+x^2+1}{x+1}$.

12. $\boxed{5}$ $\dfrac{\frac{1}{3}x^6+2}{3x-2}$.

13. $\boxed{6}$ $\dfrac{5x^3}{(x-4)^2}$.

14. $\boxed{6}$ $\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$.

15. $\boxed{7}$ $(3-x)(x-2)(x+3)(x+2)$.

16. $\boxed{5}$ Найти $f'\left(\dfrac{1}{9}\right)$, если $f(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{10x}$.

17. $\boxed{6}$ Найти $f'(1)$, если $f(x) = 3(x^2+2)\sqrt{x}$.

Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю (18—19).

18. $\boxed{6}$ $f(x) = (x + 5)^4 (5 - 2x)$.

19. $\boxed{6}$ $f(x) = (x - 14)^3 \sqrt{x}$.

Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает положительные значения (20—21).

20. $\boxed{7}$ $f(x) = (x + 5)^4 (5 - 2x)$.

21. $\boxed{8}$ $f(x) = (x - 14)^3 \sqrt{x}$.

Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает отрицательные значения (22—24).

22. $\boxed{7}$ $f(x) = x^3 - 12x$.

23. $\boxed{8}$ $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

24. $\boxed{8}$ $f(x) = (x^2 - 21)x^{\frac{3}{2}}$.

Найти производную сложной функции (25—26).

25. $\boxed{7}$ $(5x + 4)^2 - 2(5x + 4)$.

26. $\boxed{8}$ $\sqrt[7]{(x^2 - 8)^3}$, где $x \neq 2\sqrt{2}$.

§ 47. Производные некоторых элементарных функций

Справочные сведения

1. $(e^x)' = e^x$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\cos x \neq 0$.
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\sin x \neq 0$.

При замене аргумента x на $kx+b$ в каждой из формул **1—8** нужно правую часть формулы умножить на k. Например, из формулы **4** можно получить следующую формулу:

$$(\log_a(kx+b))' = \frac{k}{(kx+b)\ln a}.$$

Примеры с решениями

1. Найти производную функции:

1) 5^x; 2) 5^{3x-1}; 3) $\sin x\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x$.

Решение.
1) $(5^x)' = 5^x \ln 5$;
2) $(5^{3x-1})' = 3\cdot 5^{3x-1}\cdot \ln 5$;
3) $\sin x\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x = \sin x\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) =$

$$= \sin x\left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sin x\cdot\frac{1+\cos 2x - 1}{2} = \frac{1}{2}\sin x\cos 2x,$$

поэтому

$$\left(\sin x\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x\right)' = \left(\frac{1}{2}\sin x\cos 2x\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}((\sin x)'\cos 2x + \sin x(\cos 2x)') =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x\cos 2x - 2\sin x\sin 2x) = \frac{1}{2}\cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x.$$

2. Найти значение производной функции

$f(x) = e^{5-2x} + \ln\left(\frac{x}{2}+1\right)$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. $f'(x) = (e^{5-2x})' + \left(\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)' =$

$$= -2e^{5-2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}x+1} = -2e^{5-2x} + \frac{1}{x+2}.$$

$$f'(2) = -2e^{5-2\cdot 2} + \frac{1}{2+2} = -2e + \frac{1}{4}.$$

3. Найти производную функции $F(x) = \sin^3(5x+1)$.

Решение. Пусть $F(x) = y^3$, где $y = \sin(5x+1)$, тогда

$$F'(x) = 3\sin^2(5x+1)(\sin(5x+1))' =$$
$$= 3\sin^2(5x+1)\cdot 5\cos(5x+1) =$$
$$= 15\sin^2(5x+1)\cdot\cos(5x+1).$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти производную функции (1—14).

1. $\boxed{3}$ $e^x + \sin x$.

2. $\boxed{3}$ $\cos x - \log_5 x$.

3. $\boxed{4}$ $x^6 \ln x$.

4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} 3x$.

5. $\boxed{4}$ e^{5-3x}.

6. $\boxed{5}$ 3^{2x+1}.

7. $\boxed{5}$ $\ln(2-3x)$.

8. $\boxed{5}$ $\log_7(12x+5)$.

9. $\boxed{4}$ $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

10. $\boxed{4}$ $\cos(-6x+7)$.

11. $\boxed{5}$ $3e^{2x} - \sqrt{x}$.

12. $\boxed{6}$ $e^{1-x}x^8$.

13. $\boxed{6}$ $e^x(x^2 - 5x + 3)$.

14. $\boxed{7}$ $e^{2x}\sqrt{2x-3}$.

Найти производную функции (15—19).

15. $\boxed{4}$ $\sin^2 x + \cos^2 x$.

16. $\boxed{6}$ $(\sin x + \cos x)^2$.

17. $\boxed{5}$ $\cos^2 x - \sin^2 x$.

18. $\boxed{7}$ $\sin^2 x$.

19. $\boxed{8}$ $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 (20—22).

20. $\boxed{4}$ $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

21. $\boxed{6}$ $f(x) = e^{3-x} + \log_2(2x-3)$, $x_0 = 2$.

22. $\boxed{7}$ $f(x) = e^{3x}(3-2x)$, $x_0 = 0$.

Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно нулю (23—26).

23. $\boxed{5}$ $f(x) = x^2e^{-x}$.

24. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$.

25. $\boxed{7}$ $f(x) = \sqrt{x+4} - 2\ln(x+7)$.

26. $\boxed{7}$ $f(x) = 2\sqrt{x+2} - \ln(x-4)$.

Решить неравенство $f'(x) > 0$ для функции $f(x)$ (27—30).

27. $\boxed{6}$ $f(x) = e^x x^{-2}$.

28. $\boxed{6}$ $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 3x$.

29. $\boxed{6}$ $f(x) = \sin 2x - 2x$.

30. $\boxed{7}$ $f(x) = \ln(3x) - \sqrt{3x}$.

Найти производную сложной функции (31—40).

31. $\boxed{7}$ $\cos(x^2 - 3)$.

32. $\boxed{7}$ $\cos^3 x$.

33. $\boxed{8}$ $\sin^2(4x - 3)$.

34. $\boxed{7}$ $\sin^3 x^2$.

35. $\boxed{7}$ $\ln x^4$.

36. $\boxed{7}$ e^{2x^3}.

37. $\boxed{7}$ 4^{x^2}.

38. $\boxed{8}$ $0{,}3^{\ln x + 5}$.

39. $\boxed{8}$ $\log_2(\sin x)$.

40. $\boxed{8}$ $\sqrt[3]{\log_{0,1} x}$.

Вариант II

Найти производную функции (1—14).

1. $\boxed{3}$ $\cos x + 3^x$.

2. $\boxed{3}$ $\ln x - \sin x$.

3. $\boxed{4}$ $x^5 \ln x$.

4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} 4x$.

5. $\boxed{4}$ e^{1-7x}.

6. $\boxed{5}$ 2^{3x-1}.

7. $\boxed{5}$ $\ln(4 + 3x)$.

8. $\boxed{5}$ $\log_4(10x + 3)$.

9. $\boxed{4}$ $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$.

10. $\boxed{4}$ $\cos(0{,}2x - 5)$.

11. $\boxed{5}$ $2e^{-2x} + \sqrt[3]{x}$.

12. $\boxed{6}$ $e^{2-3x} x^4$.

13. $\boxed{6}$ $e^{2x}(x^2 - 3x)$.

14. $\boxed{7}$ $e^x\sqrt{4 - 2x}$.

Найти производную функции (15—19).

15. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

16. $\boxed{6}$ $(\cos x - \sin x)^2$.

17. $\boxed{5}$ $\sin^2 x - \cos^2 x$.

18. $\boxed{7}$ $\cos^2 x$.

19. $\boxed{8}$ $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 (20—22).

20. $\boxed{4}$ $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

21. $\boxed{6}$ $f(x) = \ln(3x - 2) + 3^{2x}$, $x_0 = 1$.

22. $\boxed{7}$ $f(x) = (5 - 3x)\, e^{2x}$, $x_0 = 0$.

Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно нулю (23—26).

23. $\boxed{5}$ $f(x) = e^x x^{-2}$.

24. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3}$.

25. $\boxed{7}$ $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\ln(x + 2)$.

26. $\boxed{7}$ $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(x - 2)$.

Решить неравенство $f'(x) > 0$ для функции $f(x)$ (27—30).

27. $\boxed{6}$ $f(x) = x^2 e^{-x}$.

28. $\boxed{6}$ $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$.

29. $\boxed{6}$ $f(x) = \cos 3x - 3x$.

30. $\boxed{7}$ $f(x) = \sqrt{2x} - \ln(2x)$.

Найти производную сложной функции (31—40).

31. $\boxed{7}$ $\sin(x^3 + 2)$.

32. $\boxed{7}$ $\sin^4 x$.

33. $\boxed{8}$ $\cos^2(3x + 2)$.

34. $\boxed{7}$ $\cos^3 x^2$.

35. $\boxed{7}$ $\ln x^3$.

36. $\boxed{7}$ e^{3x^2}.

37. $\boxed{7}$ 5^{x^3}.

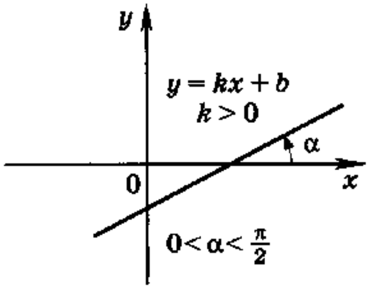
38. $\boxed{8}$ $0{,}2^{3 + \ln x}$.

39. $\boxed{8}$ $\log_5(\cos x)$.

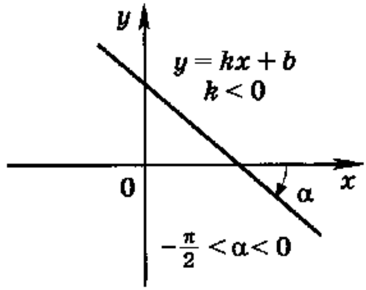
40. $\boxed{8}$ $\sqrt[5]{\log_\pi x}$.

§ 48. Геометрический смысл производной

Справочные сведения



а)



б)

Рис. 47

α — угол между прямой $y = kx + b$ и осью Ox;

$k = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ (рис. 47).

Геометрический смысл производной: значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x_0;\ f(x_0))$ (рис. 48):

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$ (рис. 49):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

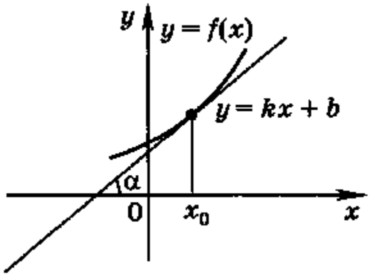


Рис. 48

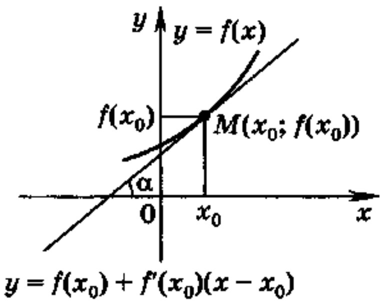


Рис. 49

Примеры с решениями

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;\ 3)$ и образующей с осью Ox угол $-\frac{\pi}{4}$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид $y = kx + b$. Найдём угловой коэффициент прямой: $k = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Так как точка $(-2;\ 3)$ принадлежит данной прямой и $k = -1$, то $3 = -1 \cdot (-2) + b$, откуда $b = 1$.

Ответ. $y = -x + 1$ — искомое уравнение прямой.

2. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Сначала находим $f(2) = 2^3 - 2 = 6$, далее $f'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$. По формуле (1) уравнение касательной $y = 6 + 11(x - 2)$, откуда $y = 11x - 16$.

3. Найти точки графика функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{3}$, в которых касательная к нему параллельна прямой $y = 2x$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен 2. Параллельные ей прямые имеют такой же угловой коэффициент. Абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ либо параллельна прямой $y = 2x$, либо совпадает с ней, найдём из уравнения $f'(x) = 2$, или $\frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x = 2$, $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Далее находим

$$y_1 = f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 3\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 2{,}5;$$

$$y_2 = f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3\frac{1}{3} = \frac{8}{3} - 2 + 3\frac{1}{3} = 4.$$

Точка $(-1;\ 2{,}5)$ не лежит на прямой $y = 2x$ (действительно, $2{,}5 \neq 2 \cdot (-1)$), поэтому касательная в этой точке параллельна прямой $y = 2x$.

Точка $(2;\ 4)$ лежит на прямой $y = 2x$ (действительно, $4 = 2 \cdot 2$), поэтому касательная в этой точке — сама прямая $y = 2x$. Таким образом, точка $(2;\ 4)$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $(-1;\ 2{,}5)$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$ и образующей с осью Ox угол α (1—2).

1. $\boxed{4}$ $\alpha = -\frac{\pi}{4},\ x_0 = -1,\ y_0 = 3.$

2. $\boxed{5}$ $\alpha = \operatorname{arctg} 3,\ x_0 = 2,\ y_0 = -1.$

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (3—5).

3. $\boxed{3}$ $f(x) = 3x^2,\ x_0 = 1.$

4. $\boxed{4}$ $f(x) = \ln(2x + 1),\ x_0 = 0.$

5. $\boxed{5}$ $f(x) = \sin 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{12}.$

Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox (6—8).

6. $\boxed{4}$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ x_0 = 1.$

7. $\boxed{5}$ $f(x) = \frac{1}{4x^4},\ x_0 = 1.$

8. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x},\ x_0 = 3.$

Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ (9—12).

9. $\boxed{4}$ $f(x) = x^5 - x^3 + 3x - 1.$

10. $\boxed{5}$ $f(x) = \sqrt{x + 4}.$

11. $\boxed{6}$ $f(x) = \cos\frac{x}{3}.$

12. $\boxed{6}$ $f(x) = \ln(3x + 1).$

Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (13—18).

13. $\boxed{4}$ $f(x) = x^3 - 2x,\ x_0 = 2.$

14. $\boxed{4}$ $f(x) = 4x^2 + 1,\ x_0 = -2.$

15. $\boxed{5}$ $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$.

16. $\boxed{6}$ $f(x) = \sin 2x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

17. $\boxed{6}$ $f(x) = \ln x,\ x_0 = e$.

18. $\boxed{6}$ $f(x) = e^{3x},\ x_0 = 0$.

Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k (19—22).

19. $\boxed{5}$ $f(x) = x^2 - 3x + 4,\ k = 1$.

20. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5,\ k = 3$.

21. $\boxed{7}$ $f(x) = \sqrt{5x+1},\ k = \frac{5}{8}$.

22. $\boxed{7}$ $f(x) = \sin 2x,\ k = 2$.

Вариант II

Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$ и образующей с осью Ox угол α (1—2).

1. $\boxed{4}$ $\alpha = \frac{\pi}{4},\ x_0 = -2,\ y_0 = 1$.

2. $\boxed{5}$ $\alpha = \operatorname{arctg}(-2),\ x_0 = 3,\ y_0 = 2$.

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (3—5).

3. $\boxed{3}$ $f(x) = 2x^3,\ x_0 = 1$.

4. $\boxed{4}$ $f(x) = e^{2x},\ x_0 = 0$.

5. $\boxed{5}$ $f(x) = \cos 4x,\ x_0 = \frac{\pi}{12}$.

Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox (6—8).

6. $\boxed{4}$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4,\ x_0 = 1$.

7. $\boxed{5}$ $f(x) = \frac{1}{2x^2}$, $x_0 = 1$.

8. $\boxed{6}$ $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$.

Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ (9—12).

9. $\boxed{4}$ $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 2$.

10. $\boxed{5}$ $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

11. $\boxed{6}$ $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

12. $\boxed{6}$ $f(x) = \ln(-2x + 1)$.

Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (13—18).

13. $\boxed{4}$ $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 2$.

14. $\boxed{4}$ $f(x) = 2x^3 - 5$, $x_0 = -2$.

15. $\boxed{5}$ $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

16. $\boxed{6}$ $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = -\frac{\pi}{12}$.

17. $\boxed{6}$ $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

18. $\boxed{6}$ $f(x) = 2\ln x$, $x_0 = e$.

Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k (19—22).

19. $\boxed{5}$ $f(x) = x(x - 1)$, $k = 3$.

20. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$, $k = 1$.

21. $\boxed{7}$ $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $k = \frac{3}{4}$.

22. $\boxed{7}$ $f(x) = \sin x + x$, $k = 0$.

Контрольная работа № 2

Вариант I

1. Найти производную функции:

   1) $3x^2 - \frac{1}{x^3}$; 2) $\left(\frac{x}{3}+7\right)^6$; 3) $e^x \cos x$; 4) $\frac{2^x}{\sin x}$.

2. Найти значение производной функции $f(x) = 1 - 6\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 8$.
3. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin x - 3x + 2$ в точке $x_0 = 0$.

---

4. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ положительны.
5. Найти точки графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.
6. Найти производную функции $F(x) = \log_3 (\sin x)$.

Вариант II

1. Найти производную функции:

   1) $2x^3 - \frac{1}{x^2}$; 2) $(4-3x)^6$; 3) $e^x \sin x$; 4) $\frac{3^x}{\cos x}$.

2. Найти значение производной функции $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = \frac{1}{4}$.
3. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x - \sin x + 1$ в точке $x_0 = 0$.

---

4. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x) = \frac{1-x}{x^2+8}$ отрицательны.
5. Найти точки графика функции $f(x) = x^3 + 3x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.
6. Найти производную функции $F(x) = \cos (\log_2 x)$.

Задания для подготовки к экзамену

1. $\boxed{5}$ Найти производную функции:

1) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin 2x}$; 2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x}{\sin x+\cos x}$;

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{6-x}{3}}+3\ln\dfrac{x+1}{3}$;

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-8}{2}}+4\ln\dfrac{1-x}{4}$.

Ответ. 1) $-\dfrac{2}{\sin 2x\cdot\operatorname{tg} 2x}$; 2) $\dfrac{\sin x-\cos x}{1+\sin x}$;

3) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{18-3x}}$; 4) $\dfrac{1}{2\sqrt{2x-16}}-\dfrac{4}{1-x}$.

2. $\boxed{4}$ Вычислить значение производной функции:

1) $y=e^{1-4x}+6\sqrt{5x+1}$ в точке $x_0=0{,}25$;

2) $y=5\ln(9x+2)+\sqrt{11-6x}$ в точке $x_0=\dfrac{1}{3}$.

Ответ. 1) 6; 2) 8.

3. $\boxed{4}$ На каком из рисунков 50—53 (с. 69) изображён эскиз графика функции, являющейся производной функции:

1) $y=x^2$; 2) $y=2\sin x$; 3) $y=\cos 2x$; 4) $y=x^3$?

Ответ. 1) Рис. 53; 2) рис. 50; 3) рис. 52; 4) рис. 51.

4. $\boxed{4}$ Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $y=x^3-3x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-1$;

2) $y=-x^3+x^2-1$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.

Ответ. 1) $y=9x+5$; 2) $y=-16x-21$.

5. $\boxed{5}$ Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $y=5x^{-\frac{2}{5}}+27$ в точке с ординатой $y_0=32$;

2) $y=11-3x^{-\frac{4}{3}}$ в точке с ординатой $y_0=8$.

Ответ. 1) $y=-2x+34$; 2) $y=4x+4$.

6. $\boxed{5}$ Найти:

1) абсциссы всех таких точек графика функции

$$y=0{,}5\sin 2x-\cos x+x,$$

в которых угловой коэффициент касательной равен 1;

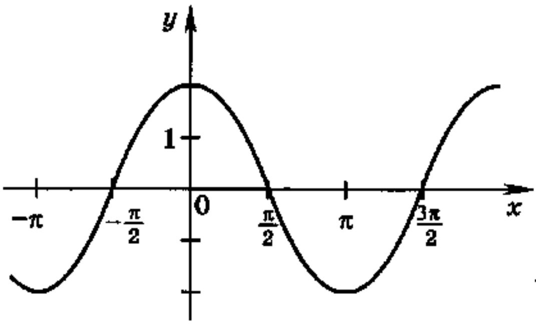


Рис. 50

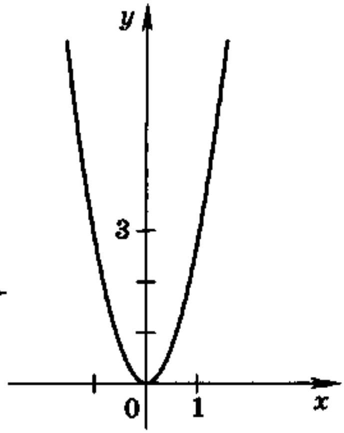


Рис. 51

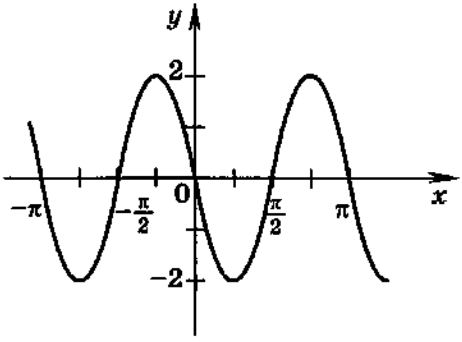


Рис. 52

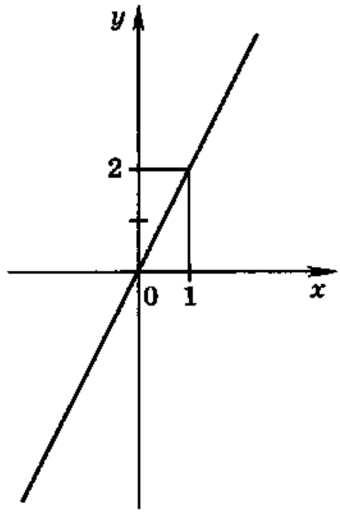


Рис. 53

2) абсциссы всех таких точек графика функции

$$y = 0{,}5 \sin 2x + 3 \sin x + x,$$

в которых угловой коэффициент касательной равен –1.
Указание. Решить уравнение: 1) $y'(x) = 1$; 2) $y'(x) = -1$.

Ответ. 1) $\frac{\pi}{2}(4n+1),\ n \in \mathbf{Z}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$;

2) $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

7. $\boxed{6}$ **Найти:**

1) все такие точки графика функции $y = \dfrac{4^x - 2^{x+1}}{\ln 4}$,

в которых касательная к нему параллельна прямой $y = 2x + 5$;

2) все такие точки графика функции $y = \dfrac{9^x - 2 \cdot 3^x}{\ln 9}$,

в которых касательная к нему параллельна прямой $y = 6x - 5$.

Указание. 1) Абсциссы точек графика функции, в которых касательная параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней, найти из уравнения $y'(x) = 2$. Из полученных точек искомыми будут те, которые не лежат на прямой $y = 2x + 5$.

Ответ. 1) (1; 0); 2) (1; 0).

8. $\boxed{6}$ **Найти:**

1) расстояние от начала координат до той касательной к графику функции $y = x \ln x$, которая параллельна оси абсцисс;

2) расстояние от оси абсцисс до той касательной к графику функции $y = 4\ln(x-1) - x^2$, которая параллельна оси абсцисс.

Указание. 1) Угловой коэффициент касательной, параллельной оси абсцисс, равен нулю. Абсцисса точки касания находится из уравнения $y'(x) = 0$.

Ответ. 1) $\dfrac{1}{e}$; 2) 4.

9. $\boxed{7}$ **Найти:**

1) точку пересечения касательных, проведённых к графику функции $y = x^2 - |5x + 9|$ через точки этого графика с абсциссами 4 и -4;

2) точку пересечения касательных, проведённых к графику функции $y = x^2 + |7 - 4x|$ через точки этого графика с абсциссами 3 и -3.

Указание. 1) Рассмотреть функцию и её производную на промежутках $\left[-\dfrac{9}{5}; +\infty\right)$ и $\left(-\infty; -\dfrac{9}{5}\right)$.

Ответ. 1) (3; -16); 2) (0,7; -9).

10. $\boxed{6}$ **Найти все значения параметра a, при которых уравнение $f'(x) = 0$ не имеет действительных корней, если:**

1) $f(x) = ax^3 - \dfrac{1}{x}$; 2) $f(x) = x^3 + \dfrac{a}{x}$;

3) $f(x) = ax^2 + \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x$;

5) $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$.

Ответ. 1) $a \geqslant 0$; 2) $a < 0$; 3) $a = 0$; 4) $-3 < a < 3$; 5) $a > 3$.

11. $\boxed{7}$ Выяснить:

1) при каких значениях p касательная, проведённая к графику функции $y = x^3 - px$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$, проходит через точку $M(2;\ 3)$;
2) при каких значениях a касательная, проведённая к графику функции $y = x^3 + ax$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$, проходит через точку $N(3;\ 2)$.

Указание. 1) Записать уравнение касательной к графику функции в точке $x_0 = 1$ и подставить в него вместо x и y соответствующие координаты точки M.

Ответ. 1) При $p = 0{,}5$; 2) при $a = \frac{9}{7}$.

12. $\boxed{7}$ Выяснить:

1) при каких значениях параметра a прямая $y = ax - 2$ касается графика функции $y = 1 + \ln x$;

2) при каких значениях параметра b прямая $y = bx + 1$ касается графика функции $y = 2 - \ln x$.

Указание. 1) Если x_0 — абсцисса точки касания, то:

а) значение производной функции $1 + \ln x$ в точке x_0 равно a — угловому коэффициенту касательной;

б) точка касания — это общая точка графика функции и касательной, поэтому $1 + \ln x_0 = ax_0 - 2$.

Ответ. 1) $a = e^2$; 2) $b = -\frac{1}{e^2}$.

13. $\boxed{4}$ Найти значение производной функции

$f(x) = 2x^7 + 4\cos x$ в точке $x_0 = 0$. Ответ. 0.

14. $\boxed{4}$ Найти значение производной функции $y = xe^x$ в точке $x_0 = 1$. Ответ. $2e$.

15. $\boxed{4}$ При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t - 1$ (t — время движения в секундах). Найти скорость (в метрах в секунду) тела через 4 с после начала движения. Ответ. 9.

Задания для интересующихся математикой

1. Найти общие касательные к графикам функций

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -x^2 + 6x - 10.$$

Ответ. Две касательные: $y = -1$ и $y = 2x - 6$.

2. Две параллельные касательные к графику функции $y = f(x)$ пересекают оси координат: одна — в точках A и B, другая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если она в 4 раза меньше площади треугольника COD. Решить задачу для функции:

1) $f(x) = x^3 - 6$; 2) $f(x) = x^3 + \frac{2}{3}$.

Ответ. 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{8}{27}$ или $\frac{8\sqrt[3]{3}}{81}$.

§ 49. Возрастание и убывание функции

Справочные сведения

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке (рис. 54, *а*).

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке (рис. 54, *б*).

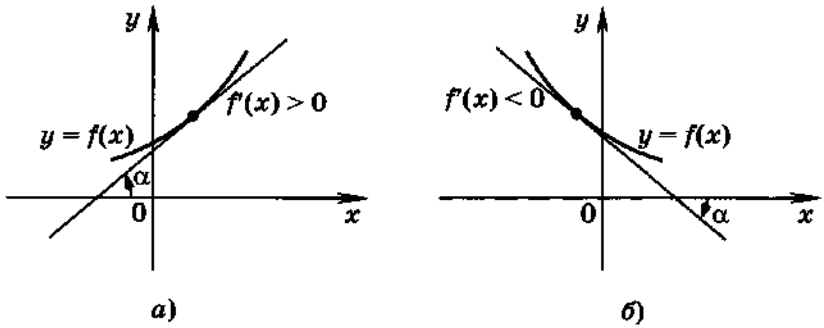


Рис. 54

Промежутки возрастания и убывания функции называют *промежутками монотонности функции.*

Пример с решением

Найти промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = x^4 - 8x^2$; 2) $f(x) = \sqrt{3x-1}$.

Решение.

1) Находим $f'(x) = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$.

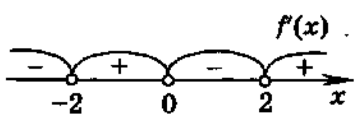


Рис. 55

С помощью метода интервалов установим (рис. 55), что

$$f'(x) = 4x(x-2)(x+2) > 0$$

при $-2 < x < 0$, $x > 2$; $f'(x) < 0$ при $x < -2$, $0 < x < 2$.

Ответ. $(-2;\ 0)$, $(2;\ +\infty)$ — промежутки возрастания; $(-\infty;\ -2)$, $(0;\ 2)$ — промежутки убывания.

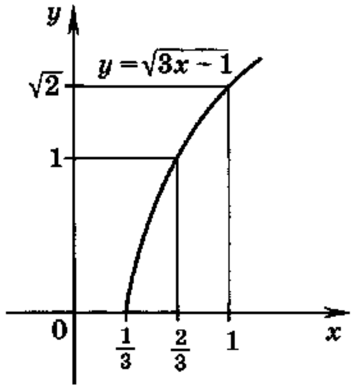


Рис. 56

2) Так как $\sqrt{3x-1} \geqslant 0$ при любом x из области определения функции, то $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ может принимать только положительные значения при $x > \dfrac{1}{3}$, следовательно, функция возрастает на промежутке $\left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$. Заметим, что функция $y = \sqrt{3x-1}$ (рис. 56) возрастает не только на промежутке $\left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$, но и на промежутке $\left[\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти промежутки возрастания и убывания функции (1—17).

1. $\boxed{2}$ $y = 3x - 1$.

2. $\boxed{2}$ $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

3. $\boxed{3}$ $y = 2x^2 - 5x$.

4. $\boxed{4}$ $y = x^3 - \dfrac{x^2}{2}$.

5. $\boxed{4}$ $y = -x^3 + 3x^2$.

6. $\boxed{4}$ $y = x^3 - 6x$.

7. $\boxed{4}$ $y = x^4 - 18x^2$.

8. $\boxed{4}$ $y = x^4 + 4x$.

9. $\boxed{4}$ $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$.

10. $\boxed{5}$ $y = \dfrac{1}{x-3}$.

11. $\boxed{5}$ $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$.

12. $\boxed{4}$ $y=\sqrt{x-2}$.

13. $\boxed{4}$ $y=-\sqrt{x+4}$.

14. $\boxed{6}$ $y=\dfrac{x^2-x+3}{x^2}$.

15. $\boxed{6}$ $y=e^{5x}(x-2)$.

16. $\boxed{5}$ $y=\sin x-2x$.

17. $\boxed{7}$ $y=\cos x-5$.

18. $\boxed{5}$ Доказать, что функция $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x}$ возрастает на промежутке $(2;+\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;2)$.

19. $\boxed{7}$ При каких значениях a функция $y=x^3+3ax$ возрастает на всей числовой прямой?

Вариант II

Найти промежутки возрастания и убывания функции (1—17).

1. $\boxed{2}$ $y=\dfrac{1}{3}x-5$.

2. $\boxed{2}$ $y=-2x+8$.

3. $\boxed{3}$ $y=4x^2-7x$.

4. $\boxed{4}$ $y=-x^3+2x^2$.

5. $\boxed{4}$ $y=x^3-6x^2$.

6. $\boxed{4}$ $y=x^3-15x$.

7. $\boxed{4}$ $y=x^4-2x^2$.

8. $\boxed{4}$ $y=x^4+32x$.

9. $\boxed{4}$ $y=2x^3-6x^2-18x+4$.

10. $\boxed{5}$ $y=\dfrac{1}{x-4}$.

11. $\boxed{5}$ $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

12. $\boxed{4}$ $y=\sqrt{x-5}$.

13. $\boxed{4}$ $y=-\sqrt{x+1}$.

14. $\boxed{6}$ $y=\dfrac{x^2+x-4}{x^2}$.

15. $\boxed{6}$ $y=(x+2)e^{4x}$.

16. $\boxed{5}$ $y=\cos x+3x$.

17. $\boxed{7}$ $y=\sin x+3$.

18. $\boxed{5}$ Доказать, что функция $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$ возрастает на промежутках $(-1;0)$ и $(0;+\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;-1)$.

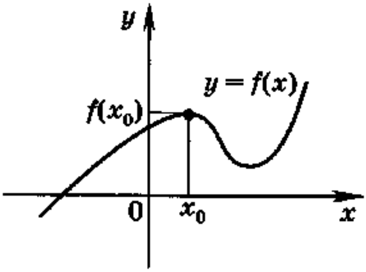
19. $\boxed{7}$ При каких значениях b функция $y=x^5+5bx$ возрастает на всей числовой прямой?

§ 50. Экстремумы функции

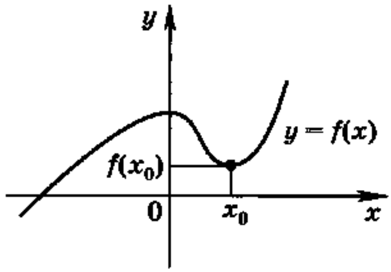
Справочные сведения

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$ (рис. 57, *а*), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$ (рис. 57, *б*), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



а)



б)

Рис. 57

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума.*

Теорема Ферма. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

В точке экстремума касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (рис. 58).

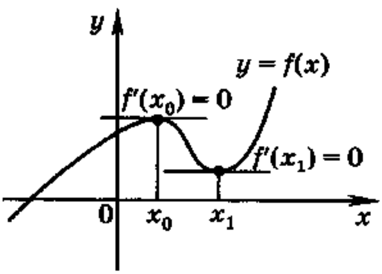


Рис. 58

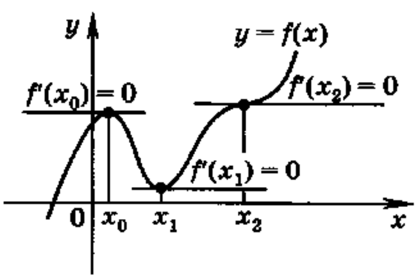


Рис. 59

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными точками* (например, точки x_0, x_1, x_2 на рисунке 59 стационарные).

Внутренние точки области определения непрерывной функции, в которых функция либо не дифференцируема (т. е. не имеет в них производной), либо имеет производную, равную нулю, называют *критическими точками* этой функции (например, точки x_0, x_1, x_2 на рисунке 60 критические, из них стационарной является только точка x_2).

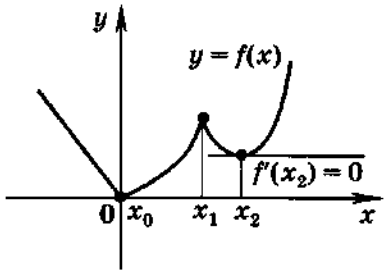


Рис. 60

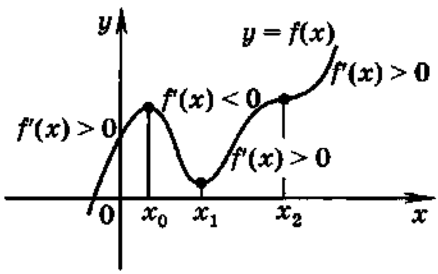


Рис. 61

Сформулируем *достаточные условия экстремума.* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) и непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если производная функции $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «−», то эта точка является точкой максимума (на рисунке 61 точка x_0 — точка максимума);

2) если производная функции $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «−» на «+», то эта точка является точкой минимума (на рисунке 61 точка x_1 — точка минимума);

3) если при переходе через точку x_0 производная не меняет свой знак, то эта точка не является точкой экстремума.

Примеры с решениями

1. Найти критические точки функции $y = f(x)$, график которой изображён на рисунке 62. Выявить среди них точки экстремума.

Р е ш е н и е. Точки x_0 и x_7 не являются внутренними точками области определения функции; в точке x_1 производная существует и отлична от нуля; в точках x_2, x_3, x_4

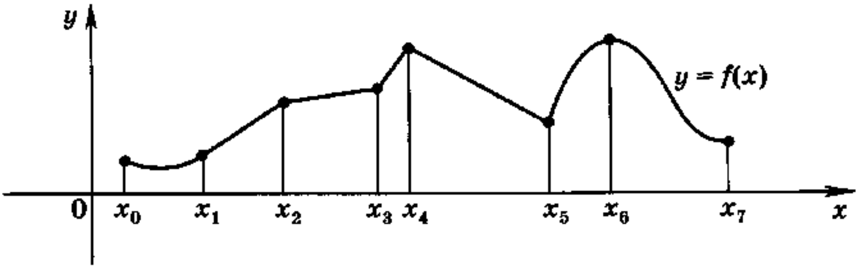


Рис. 62

и x_5 производная не существует; в точке x_6 производная равна нулю. Таким образом, критическими являются точки x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 (среди них стационарной является точка x_6).

Производная меняет свой знак при переходе через точки x_4, x_5 и x_6 — они являются точками экстремума (x_4 и x_6 — точки максимума, x_5 — точка минимума).

2. Найти стационарные точки функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

Решение. Стационарные точки функции $f(x)$ — это корни уравнения $f'(x) = 0$. Находим

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}.$$

Решим уравнение $\frac{3(x^4-1)}{x^2} = 0$, $\frac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^2} = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

3. Найти точки экстремума функции $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3$ и значения функции $f(x)$ в этих точках.

Решение. 1) Найдём производную функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3\right)' = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x-2)(x+2).$$

Производная существует при всех x, поэтому точки экстремума находим среди стационарных точек:

$$x^2(x-2)(x+2) = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2.$$

2) Проверим, какие из найденных стационарных точек являются точками экстремума.

Методом интервалов определяем знаки производной функции на промежутках $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (рис. 63).

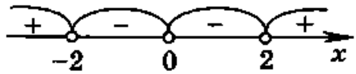


Рис. 63

При переходе через точку $x_1 = -2$ производная меняет знак с «+» на «–», поэтому $x_1 = -2$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = 0$ производная не меняет знак, значит, эта точка не является точкой экстремума. При переходе через точку $x_3 = 2$ производная меняет знак с «–» на «+», т. е. $x_3 = 2$ — точка минимума.

Находим значения функции в точках экстремума:

$$f(-2) = \frac{(-2)^5}{5} - \frac{4}{3}\cdot(-2)^3 = 4\frac{4}{15};\qquad f(2) = \frac{2^5}{5} - \frac{4}{3}\cdot 2^3 = -4\frac{4}{15}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{2}$ По заданному графику функции $y = f(x)$ (рис. 64) назвать критические, стационарные точки и точки экстремума.

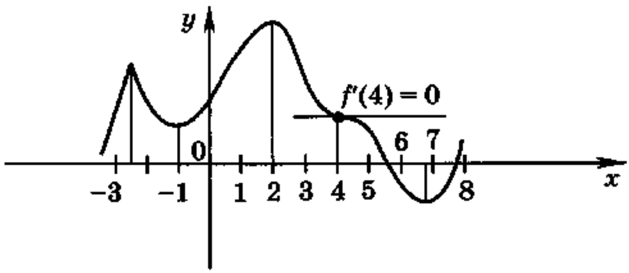


Рис. 64

Найти стационарные точки функции (2—11).

2. $\boxed{2}$ $y = 2x^2 - 1$.
3. $\boxed{3}$ $y = -x^2 + 2x$.
4. $\boxed{3}$ $y = x^3 + 2x^2$.
5. $\boxed{3}$ $y = x^3 - 4x$.
6. $\boxed{4}$ $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
7. $\boxed{4}$ $y = 2e^{3x} - 3e^{2x}$.
8. $\boxed{4}$ $y = e^{3x} - 3e^{2x}$.
9. $\boxed{4}$ $y = \sin\frac{x}{2}$.
10. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg} 3x$.
11. $\boxed{6}$ $y = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$.

Найти точки экстремума функции (12—18).

12. $\boxed{2}$ $y = -3x + 1$.

13. $\boxed{3}$ $y = 5x^2 + 20x - 3$.

14. $\boxed{4}$ $y = x^3 + 3x^2$.

15. $\boxed{4}$ $y = 9x - x^3$.

16. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$.

17. $\boxed{5}$ $y = \frac{2x+3}{2-3x}$.

18. $\boxed{6}$ $y = \frac{x^5}{3x+2}$.

19. $\boxed{6}$ На рисунке 65 изображён график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. С помощью графика найти:

1) точки экстремума функции $y = f(x)$;

2) промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$.

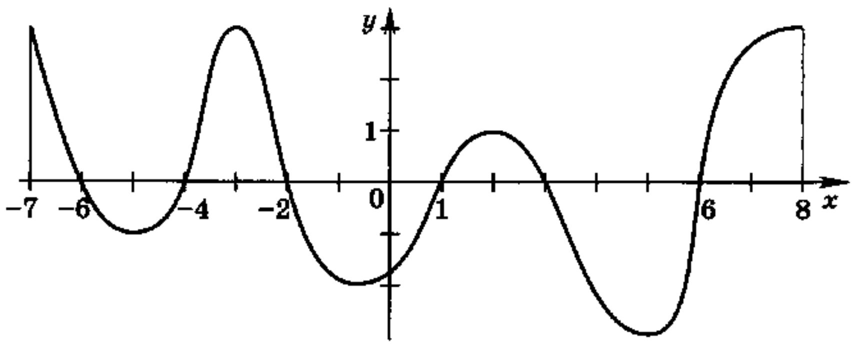


Рис. 65

Найти точки экстремума и значения функции в этих точках (20—27).

20. $\boxed{4}$ $y = 3x^2 - 2x$.

21. $\boxed{5}$ $y = 6x - x^3$.

22. $\boxed{4}$ $y = x^4 - 4x^3 + 20$.

23. $\boxed{6}$ $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 17$.

24. $\boxed{5}$ $y = \frac{x}{3} - \sqrt{2x-3}$.

25. $\boxed{5}$ $y = \cos 2x$.

26. $\boxed{4}$ $y = e^{2x} - 2e^x$.

27. $\boxed{5}$ $y = x^2e^x$.

Вариант II

1. $\boxed{2}$ **По заданному графику функции $y = f(x)$ (рис. 66) назвать критические, стационарные точки и точки экстремума.**

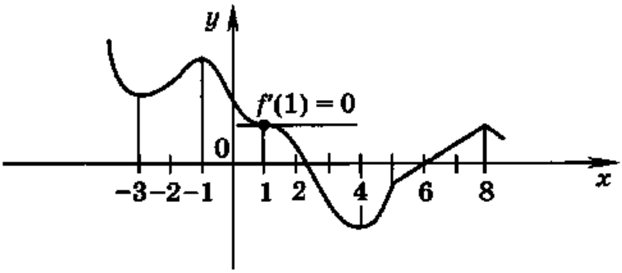


Рис. 66

Найти стационарные точки функции (2—11).

2. $\boxed{2}$ $y = -x^2 + 1.$

3. $\boxed{3}$ $y = x^2 - 4x.$

4. $\boxed{3}$ $y = x^3 + 3x^2.$

5. $\boxed{3}$ $y = x^3 - x.$

6. $\boxed{4}$ $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$

7. $\boxed{4}$ $y = \frac{e^{2x}}{2} - e^x.$

8. $\boxed{4}$ $y = 6e^{2x} - e^{3x}.$

9. $\boxed{4}$ $y = \cos\frac{x}{3}.$

10. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg} 2x.$

11. $\boxed{6}$ $y = \sin x \cdot \cos x.$

Найти точки экстремума функции (12—18).

12. $\boxed{2}$ $y = 5x - 2.$

13. $\boxed{3}$ $y = -4x^2 + 24x - 15.$

14. $\boxed{4}$ $y = x^3 + 6x^2.$

15. $\boxed{4}$ $y = 6x - x^3.$

16. $\boxed{5}$ $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{3}.$

17. $\boxed{5}$ $y = \frac{2x+3}{3-2x}.$

18. $\boxed{5}$ $y = \frac{x^3}{2x-3}.$

19. $\boxed{6}$ На рисунке 67 изображён график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. С помощью графика найти:

1) точки экстремума функции $y = f(x)$;

2) промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$.

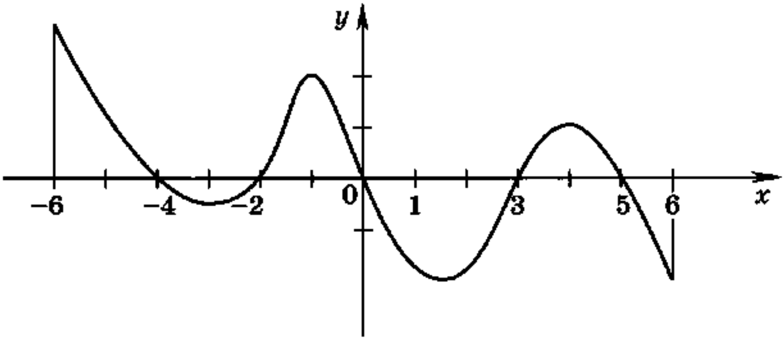


Рис. 67

Найти точки экстремума и значения функции в этих точках (20—27).

20. $\boxed{4}$ $y = 3x - 5x^2$.

21. $\boxed{5}$ $y = x^3 - 9x$.

22. $\boxed{4}$ $y = 8x^3 - 3x^4 - 7$.

23. $\boxed{6}$ $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 19$.

24. $\boxed{5}$ $y = \sqrt{2x+5} - \frac{x}{5}$.

25. $\boxed{5}$ $y = \sin 3x$.

26. $\boxed{4}$ $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

27. $\boxed{5}$ $y = x^3e^x$.

§ 51. Применение производной к построению графиков функций

Справочные сведения

Чтобы построить график функции, обычно предварительно исследуют функцию, для чего находят:

1) область определения;
2) производную;
3) критические точки;
4) промежутки возрастания и убывания;

5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Для более точного построения графика находят точки его пересечения с осями координат (а иногда ещё несколько точек).

Чтобы построить график чётной (нечётной) функции, достаточно исследовать её свойства и построить график при $x > 0$ (или при $x \geqslant 0$), а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат).

Пример с решением

Построить график функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

Решение.

1) Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) $f'(x) = (3x^5 - 5x^3)' = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1)$.

3) Производная существует при всех x. Решив уравнение $15x^2(x-1)(x+1) = 0$, находим стационарные точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

4) Решив неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$, находим промежутки возрастания функции: $(-\infty; -1)$, $(1, +\infty)$, промежутки убывания функции: $(-1; 0)$, $(0; 1)$ (рис. 68).

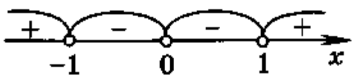


Рис. 68

5) Стационарная точка $x_1 = -1$ является точкой максимума, поскольку при переходе через неё производная меняет знак с «+» на «−»; $f(-1) = 2$.

Стационарная точка $x_2 = 0$ не является точкой экстремума.

Стационарная точка $x_3 = 1$ является точкой минимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с «−» на «+»; $f(1) = -2$.

По результатам исследования составим таблицу:

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	0	↘	−2	↗

Дополнительно найдём абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $f(x) = 0$, т. е. уравнение $3x^5 - 5x^3 = 0$. Его корнями являются числа $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, 0, $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = 3x^5 - 5x^3$ (рис. 69).

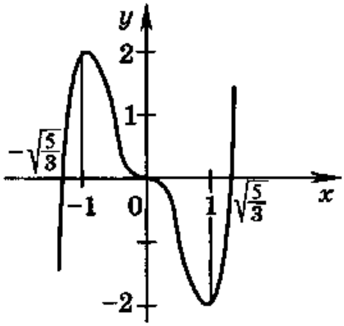


Рис. 69

Замечание. Для построения графика функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ можно было, воспользовавшись тем, что функция $f(x)$ нечётная ($f(-x) = -f(x)$), построить график функции на промежутке $[0; +\infty)$ и отразить его симметрично относительно начала координат.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ На отрезке $[-4; 3]$ построить график непрерывной функции $y = f(x)$, пользуясь данными, приведёнными в таблице. Учесть, что $f(0) = 2$.

x	-4	$-4 < x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘	-3	↗	4	↘	0

Построить эскиз графика функции (2—9).

2. $\boxed{4}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

3. $\boxed{4}$ $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$.

4. $\boxed{4}$ $f(x) = x^4 - 8x^2$.

5. $\boxed{4}$ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 20$.

6. $\boxed{5}$ $f(x) = \frac{x}{2} - 2\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 16]$.

7. $\boxed{5}$ $f(x) = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 9\right]$.

8. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

9. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Вариант II

1. $\boxed{3}$ На отрезке $[-3;\ 4]$ построить график непрерывной функции $y = f(x)$, пользуясь данными, приведёнными в таблице. Учесть, что $f(0) = -2$.

x	-3	$-3<x<-1$	-1	$-1<x<2$	2	$2<x<4$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2

Построить эскиз графика функции (2—9).

2. $\boxed{4}$ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

3. $\boxed{4}$ $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$.

4. $\boxed{4}$ $f(x) = x^4 - 2x^2$.

5. $\boxed{4}$ $f(x) = 8x^3 - 3x^4 - 7$.

6. $\boxed{5}$ $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{x}{2}$ на отрезке $[1;\ 16]$.

7. $\boxed{5}$ $f(x) = x + \frac{4}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{3};\ 8\right]$.

8. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

9. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x}{2} - \cos x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

§ 52. Наибольшее и наименьшее значения функции

Справочные сведения

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и имеет производную в каждой его внутренней точке, то для нахождения наибольшего и наименьшего значений этой функции на отрезке $[a;\ b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти значения функции в критических точках, принадлежащих интервалу $(a;\ b)$;

3) из найденных в пп. 1 и 2 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Если дифференцируемая на интервале $(a;\ b)$ функция $f(x)$ имеет на этом интервале только одну стационарную точку x_0, причём $f'(x) > 0$ на одном из интервалов $(a;\ x_0)$, $(x_0;\ b)$, и $f'(x) < 0$ на другом интервале, то $f(x_0)$ является *наибольшим или наименьшим значением* функции $f(x)$ на этом интервале.

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на некотором промежутке. Тогда если в точке x_0 этого промежутка одна из функций $f(x)$ или $(f(x))^n$, где $n \in N$, принимает наибольшее (наименьшее) значение, то и другая принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение.

Примеры с решениями

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x+3}$ на отрезке $[-2;\ 6]$.

Решение.

1) Находим значения функции на концах отрезка:

$$f(-2) = \sqrt{-2+3} = 1,\quad f(6) = \sqrt{6+3} = 3.$$

2) Критических точек на интервале $(-2;\ 6)$ функция не имеет, так как производная $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0$ при всех значениях x из этого интервала.

3) Из чисел 1 и 3 наибольшим является 3, а наименьшим — число 1.

Ответ. Наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{x+3}$ на отрезке $[-2;\ 6]$ равно 3, а наименьшее равно 1.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+5x$ на отрезке $[-3;\ 0]$.

Решение.

1) $f(-3)=\frac{1}{3}\cdot(-27)+3\cdot9+5\cdot(-3)=-9+27-15=3;$ $f(0)=0$.

2) $f'(x)=x^2+6x+5$ существует при всех x; $x^2+6x+5=0$ при $x_1=-1$, $x_2=-5$. Интервалу $(-3;\ 0)$ принадлежит только одна стационарная точка $x_1=-1$,

$$f(-1)=-\frac{1}{3}+3-5=-2\frac{1}{3}.$$

3) Из чисел 3, 0, $-2\frac{1}{3}$ наибольшее равно 3, наименьшее равно $-2\frac{1}{3}$.

3. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник с наименьшей диагональю.

Решение. Под словами «найти прямоугольник» традиционно понимается задача нахождения сторон прямоугольника.

Пусть в прямоугольнике $ABCD$ с заданным периметром p (рис. 70) $AD=x$, тогда $DC=\frac{p}{2}-x$. Очевидно, что $0<x<\frac{p}{2}$. Диагональ AC найдём из треугольника ACD по теореме Пифагора: $AC=\sqrt{x^2+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}$, откуда $AC=\sqrt{2x^2-px+\frac{p^2}{4}}$. Задача сводится к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=\sqrt{2x^2-px+\frac{p^2}{4}}$ принимает наименьшее значение на интервале $\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$.

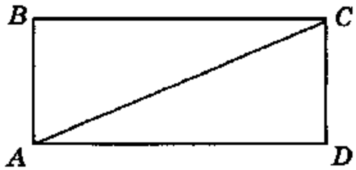


Рис. 70

Так как $f(x) = \sqrt{2x^2 - px + \frac{p^2}{4}} > 0$ на интервале $\left(0; \frac{p}{2}\right)$, то $f(x)$ и $(f(x))^2$ принимают наименьшее значение на этом интервале в одной и той же точке. Поэтому теперь задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $(f(x))^2 = 2x^2 - px + \frac{p^2}{4}$ на интервале $\left(0; \frac{p}{2}\right)$. Имеем

$$\left(2x^2 - px + \frac{p^2}{4}\right)' = 4x - p,\ 4x - p = 0 \text{ при } x = \frac{p}{4}.$$

Таким образом $x = \frac{p}{4}$ — единственная на интервале $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ стационарная точка, являющаяся точкой минимума (рис. 71). При этом вторая сторона прямоугольника равна $\frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$.

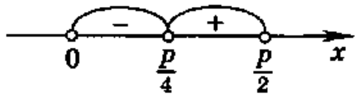


Рис. 71

Ответ. При заданном периметре p наименьшую диагональ имеет квадрат со стороной $\frac{p}{4}$.

4. Найти высоту цилиндра наибольшего объёма, вписанного в конус с высотой H (оси цилиндра и конуса совпадают).

Решение. Конусы с высотой H могут иметь различные радиусы основания. Поэтому сначала рассмотрим частный случай: конус с высотой H и радиусом основания R.

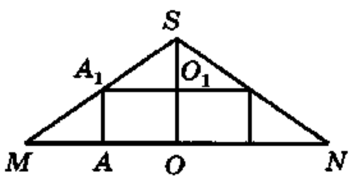


Рис. 72

На рисунке 72 изображено осевое сечение фигуры. Обозначим искомую высоту цилиндра OO_1 через x. Тогда объём цилиндра будет равен $\pi \cdot A_1O_1^2 \cdot x$. Из прямоугольных треугольников SMO и SA_1O_1 имеем $\frac{A_1O_1}{SO_1} = \operatorname{tg} \angle MSO = \frac{MO}{SO}$, откуда

$\frac{A_1O_1}{H-x}=\frac{R}{H}$, $A_1O_1=\frac{R(H-x)}{H}$. Поэтому объём цилиндра выразится формулой

$$V(x)=\pi\frac{R^2(H-x)^2}{H^2}x.$$

С учётом геометрического смысла задачи нужно найти наибольшее значение этой функции на интервале $(0;\ H)$.

$$V'(x)=\frac{\pi R^2}{H^2}(H^2x-2Hx^2+x^3)'=\frac{\pi R^2}{H^2}(H^2-4Hx+3x^2).$$

Стационарные точки найдём из уравнения $3x^2-4Hx+$ $+H^2=0$, откуда $x_1=\frac{H}{3}$, $x_2=H$. Рассматриваемому интервалу принадлежит только точка $x_1=\frac{H}{3}$, которая является точкой максимума. Следовательно, цилиндр наибольшего объёма, вписанный в рассматриваемый конус, имеет высоту, равную $\frac{H}{3}$.

Поскольку результат решения не зависит от радиуса основания конуса R, можно сделать вывод, что он получен для всех конусов с высотой H.

О т в е т. Искомая высота цилиндра равна $\frac{H}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1—12).

1. $\boxed{4}$ $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$:

1) на отрезке $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$; 2) на отрезке $[0;\ 3]$.

2. $\boxed{3}$ $f(x)=5x+1$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

3. $\boxed{3}$ $f(x)=-\frac{x}{2}+3$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

4. $\boxed{3}$ $f(x)=x^2+1$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

5. $\boxed{3}$ $f(x)=-\frac{x^2}{2}+2$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

6. $\boxed{4}$ $f(x) = (2x - 1)^2$ на отрезке $[0;\ 1]$.

7. $\boxed{4}$ $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ на отрезке $[1;\ 4]$.

8. $\boxed{4}$ $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

9. $\boxed{5}$ $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3;\ 2]$.

10. $\boxed{5}$ $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ на отрезке $[1;\ 4]$.

11. $\boxed{5}$ $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 9]$.

12. $\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

13. $\boxed{5}$ Найти наибольшее значение функции $f(x) = -x - \dfrac{4}{x^2}$ на интервале $(0;\ 3)$.

14. $\boxed{5}$ Найти наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{e^x}{x - 1}$ на интервале $(1;\ +\infty)$.

15. $\boxed{4}$ Открытая сверху коробка объёмом 36 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон основания 1 : 2. Какой должна быть меньшая сторона основания коробки, чтобы на изготовление коробки ушло наименьшее количество материала?

16. $\boxed{6}$ В прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 10 см вписан имеющий с ним общий угол прямоугольник наибольшей площади. Найти площадь прямоугольника.

17. $\boxed{7}$ Точки M и N перемещаются по разным сторонам угла A, равного $30°$, так, что площадь треугольника AMN остаётся постоянной и равной S. При каких AM и AN величина MN будет наименьшей?

18. $\boxed{7}$ Найти радиус основания цилиндра наибольшего объёма, вписанного в сферу радиуса R.

19. $\boxed{7}$ Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около сферы радиуса R.

20. $\boxed{8}$ Найти высоту правильной четырёхугольной призмы наибольшего объёма, вписанной в конус с высотой h (плоскости оснований призмы и конуса совпадают).

Вариант II

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1—12).

1. $\boxed{4}$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$:

1) на отрезке [0; 2]; 2) на отрезке [0; 5].

2. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ на отрезке [−2; 2].

3. $\boxed{3}$ $f(x) = -3x - 2$ на отрезке [−1; 2].

4. $\boxed{3}$ $f(x) = x^2 + 2$ на отрезке [−2; 1].

5. $\boxed{3}$ $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 1$ на отрезке [−1; 3].

6. $\boxed{4}$ $f(x) = (3x - 1)^2$ на отрезке [0; 1].

7. $\boxed{4}$ $f(x) = 12x - x^3$ на отрезке [−3; −1].

8. $\boxed{4}$ $f(x) = 12x - x^3$ на отрезке [−3; 1].

9. $\boxed{5}$ $f(x) = x^4 - 18x^2 + 30$ на отрезке [−4; 3].

10. $\boxed{5}$ $f(x) = x + \frac{4}{x}$ на отрезке [1; 3].

11. $\boxed{5}$ $f(x) = 6\sqrt{x} - x$ на отрезке [0; 25].

12. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ на отрезке [0; 2].

13. $\boxed{5}$ Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$ на интервале (0; 3).

14. $\boxed{5}$ Найти наибольшее значение функции $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ на интервале (0; $+\infty$).

15. $\boxed{5}$ Отливка объёмом 72 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон основания 1 : 2. При каких размерах отливки площадь её полной поверхности будет наименьшей?

16. $\boxed{6}$ В треугольник ABC со сторонами AB и AC, равными 4 см и 10 см, и углом A, равным 30°, вписан имеющий с ним общий угол параллелограмм наибольшей площади. Найти площадь параллелограмма.

17. $\boxed{7}$ Точки M и N перемещаются по разным сторонам угла A, равного $60°$, так, что $AM + AN = a$. При каких AM и AN величина MN будет наименьшей?

18. $\boxed{7}$ Найти высоту конуса наибольшего объёма, вписанного в сферу радиуса R.

19. $\boxed{7}$ Найти высоту конуса с образующей l, имеющего наибольший объём.

20. $\boxed{8}$ Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около цилиндра с высотой H (оси цилиндра и конуса совпадают).

Контрольная работа № 3

Вариант I

1. Найти стационарные точки функции

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3.$$

2. Найти экстремумы функции:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$; 2) $f(x) = e^x(2x - 3)$.

3. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3.$$

---

4. Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[-1;\ 2]$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$.
6. Среди прямоугольников, сумма длин трёх сторон которых равна 20, найти прямоугольник наибольшей площади.

Вариант II

1. Найти стационарные точки функции

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2.$$

2. Найти экстремумы функции:

1) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$; 2) $f(x) = (5 - 4x)e^x$.

3. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2.$$

---

4. Построить график функции $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ на отрезке $[-1;\ 2]$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ на отрезке $\left[-1;\ \frac{3}{2}\right]$.
6. Найти ромб с наибольшей площадью, если известно, что сумма длин его диагоналей равна 10.

Задания для подготовки к экзамену

1. $\boxed{4}$ Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+x+9}{x}$.

Ответ. 1) Функция возрастает на интервалах $(-\infty;\ -2)$, $(2;\ +\infty)$, убывает на интервалах $(-2;\ 0)$, $(0;\ 2)$; 2) функция возрастает на интервалах $(-\infty;\ -3)$, $(3;\ +\infty)$, убывает на интервалах $(-3;\ 0)$, $(0;\ 3)$.

2. $\boxed{4}$ Найти промежутки:

1) возрастания функции $f(x)=x-7-\sqrt{2x+3}$;

2) убывания функции $f(x)=5-x+2\sqrt{x+2}$.

Ответ. 1) $[-1;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; 2) $[-1;\ +\infty)$ — промежуток убывания.

3. $\boxed{4}$ Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x)=2x^2-\ln x$; 2) $f(x)=\ln x-4{,}5x^2$.

Ответ. 1) $\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]$ — промежуток убывания,

$\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$ — промежуток возрастания;

2) $\left[0;\ \dfrac{1}{3}\right]$ — промежуток возрастания,

$\left[\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$ — промежуток убывания.

4. $\boxed{4}$ Исследовать на монотонность функцию:

1) $f(x)=3-x+e^{x+2}$; 2) $f(x)=e^{3-x}+x+2$.

Ответ. 1) $(-\infty;\ -2]$ — промежуток убывания, $[-2;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; 2) $(-\infty;\ 3]$ — промежуток убывания; $[3;\ +\infty)$ — промежуток возрастания

5. $\boxed{4}$ Доказать, что функция $f(x)$ монотонна на всей области определения, если:

1) $f(x)=e^{-x}-5x$; 2) $f(x)=3x-e^{-x}$.

6. $\boxed{4}$ Исследовать на монотонность функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; 2) $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$.

Ответ. 1) $(-\infty; 0)$, $[2; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 2]$ — промежуток убывания; 2) $[-2; 0)$, $(0; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(-\infty; -2]$ — промежуток убывания.

7. $\boxed{7}$ Найти все положительные значения параметра a, при которых функция:

1) $y = ax^2 - \ln x$ убывает на интервале $(0; 5)$;

2) $y = \ln x - ax^2$ убывает на интервале $(2; +\infty)$.

Указание. 1) Интервал убывания: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$.

Чтобы функция убывала на интервале $(0; 5)$, должно выполняться неравенство $5 < \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

Ответ. 1) $0 < a \leqslant \frac{1}{50}$; 2) $a \geqslant \frac{1}{8}$.

8. $\boxed{8}$ Найти:

1) все значения t, такие, что функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$ возрастает на интервале $(t - 1; t + 1)$.

2) все значения p, такие, что функция $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$ убывает на интервале $\left(p; p + \frac{1}{2}\right)$.

Указание. 1) $(-\infty; 0]$, $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания. Чтобы функция возрастала на заданном интервале, должно выполняться одно из двух неравенств: $t + 1 \leqslant 0$, $t - 1 \geqslant 1$.

Ответ. 1) $t \leqslant -1$, $t \geqslant 2$; 2) $p \leqslant -1{,}5$, $p \geqslant 1$.

9. $\boxed{7}$ При каких значениях a функция $f(x)$ имеет одну стационарную точку, если:

1) $f(x) = ax^3 - 6x^2 + 4x + 7$;

2) $f(x) = ax^3 + 6x^2 - 2x + 7$?

Ответ. 1) $a = 0$, $a = 3$; 2) $a = 0$, $a = -6$.

10. $\boxed{4}$ Найти точки экстремумов функции:

1) $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$; 2) $f(x) = x - \sqrt{2x + 1}$.

Ответ. 1) $x = 0{,}75$ — точка максимума; 2) $x = 0$ — точка минимума.

11. $\boxed{6}$ Найти точки экстремумов функции:

1) $f(x) = e^{2x} + e^{x} - 3x + 2$;

2) $f(x) = 4x - 2e^{x} - e^{2x} - 5$.

Ответ. 1) $x = 0$ — точка минимума; 2) $x = 0$ — точка максимума.

12. $\boxed{4}$ Найти стационарные точки функции:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ и среди них указать точку максимума;

2) $f(x) = 9x + \frac{1}{x}$ и среди них указать точку минимума.

Ответ. 1) $x = 2$, $x = -2$; $x = -2$ — точка максимума; 2) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{3}$ — точка минимума.

13. $\boxed{5}$ Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2}$ на отрезке $[0;\ 2{,}5]$;

2) $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$ на отрезке $[-2;\ 0]$.

Ответ. 1) Наибольшее значение функции равно 2, наименьшее значение равно 1,5; 2) наибольшее значение функции равно -3, наименьшее значение равно -4.

14. $\boxed{5}$ Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2}\right]$;

2) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3$ на отрезке $\left[-\frac{2}{3};\ 1\frac{1}{3}\right]$.

Определить, какие целые значения принимает функция на заданном отрезке.

Ответ. 1) Наибольшее значение функции равно $1\frac{9}{16}$, наименьшее значение равно -2, целые значения: -2; -1; 0; 1; 2) наибольшее значение функции равно $\frac{16}{27}$, наименьшее значение равно $-\frac{1}{3}$, целое значение 0.

15. $\boxed{7}$ Найти:

1) максимумы функции $f(x) = \cos 2x \cos x$ на интервале $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$;

2) минимумы функции $f(x) = \cos 2x \sin x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

Указание. 1) Задача сводится к нахождению максимумов функции $g(t) = 2t^3 - t$, где $t = \cos x$, на интервале $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ. 1) Максимум функции равен $\frac{\sqrt{6}}{9}$; 2) минимум функции равен $-\frac{\sqrt{6}}{9}$.

16. $\boxed{8}$ При каких значениях x каждое из заданных выражений принимает наибольшее значение? Найти это значение:

1) $3 + \dfrac{3}{|2x^2 + x - 3| + 1}$; 2) $\dfrac{2}{5 + |3x^2 + x - 2|} - 2$.

Ответ. 1) При $x = -\frac{3}{2}$ и при $x = 1$ выражение принимает наибольшее значение, равное 6; 2) при $x = -1$ и при $x = \frac{2}{3}$ выражение принимает наибольшее значение, равное $-1{,}6$.

17. $\boxed{7}$ Выяснить, при каких значениях параметра a наименьшее значение функции:

1) $f(x) = x + e^{a-x}$ равно 4;

2) $f(x) = e^{x-a} - x$ равно -3.

Указание. 1) Исследуя функцию $f(x)$ на $\boldsymbol{R}$, установить, что наименьшее значение функции равно $a + 1$ (при $x = a$).

Ответ. 1) При $a = 3$; 2) при $a = 4$.

18. $\boxed{8}$ Выяснить:

1) при каких положительных значениях a наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x + a}$ равно $-6\sqrt{3}$;

2) при каких положительных значениях b наибольшее значение функции $y = (b - x)\sqrt{x}$ равно $10\sqrt{5}$.

Указание. 1) При исследовании функции учесть, что $a > 0$, $x \geqslant -a$.

Ответ. 1) При $a = 9$; 2) при $b = 15$.

19. $\boxed{8}$ Найти значение a и все экстремумы функции, если:
1) функция $f(x) = \ln x + ax^2 - 5x$ имеет экстремум в точке $x = 0{,}5$;
2) известно, что $x = 1$ — одна из точек экстремума функции $f(x) = \ln x + x^2 + ax$.

Ответ. 1) $a = 3$, $x = \frac{1}{3}$ — точка максимума, $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума; 2) $a = -3$, $x = \frac{1}{2}$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума.

20. $\boxed{8}$ Выяснить:
1) при каких значениях a наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + a$ на отрезке $[-2; 0]$ равно 5;
2) при каких значениях b наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x + b$ на отрезке $[1; 3]$ равно 0.

Указание. 1) На заданном отрезке функция имеет только одну критическую точку $x_0 = -1$. Среди значений $y(-2)$, $y(-1)$, $y(0)$ нужно выбрать наибольшее и установить, при каких a оно равно 5.

Ответ. 1) При $a = 3$; 2) при $b = 16$.

21. $\boxed{9}$ Выяснить:
1) при каких значениях a точка $x_0 = a$ является точкой минимума функции $y = 2x^3 - 3(a + 1)x^2 + 6ax - 1$;
2) при каких значениях b точка $x_0 = b$ является точкой максимума функции

$$y = \frac{2}{3}x^3 - (b - 2)x^2 - 4bx + 3.$$

Указание. 1) Корнями уравнения $y'(0) = 0$ являются $x_1 = 1$, $x_2 = a$. Поэтому необходимо исследовать функцию на экстремум трижды: при $a < 1$, при $a = 1$, при $a > 1$.

Ответ. 1) При $a > 1$; 2) при $b < -2$.

22. $\boxed{5}$ Записать уравнение касательной к графику функции:
1) $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ в точке её минимума;
2) $f(x) = 3^{x+1} - 27^x$ в точке её максимума.

Ответ. 1) $y = -1$; 2) $y = 2$.

23. $\boxed{4}$ Число 6 разложить на два положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наибольшей.

Ответ. $6 = 3 + 3$.

24. $\boxed{5}$ В треугольник с основанием 4 см и высотой 2 см вписан прямоугольник наибольшей площади с вершинами на сторонах треугольника. Найти площадь прямоугольника. Ответ. 2 см^2.

25. $\boxed{7}$ Внутри угла, величина которого 30°, взята точка A, находящаяся на расстояниях 2 и 3 см от сторон угла. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, отсекаемый от этого угла прямой, проходящей через точку A?

Указание. Для решения задачи использовать два способа подсчёта площади отсекаемого треугольника.

Ответ. 24 см^2.

26. $\boxed{7}$ На гипотенузе AB данного прямоугольного треугольника ABC взята точка P. Какой должна быть величина угла ACP, чтобы произведение расстояний от точек A и B до прямой CP было наибольшим? Ответ. 45°.

27. $\boxed{7}$ Улитка выползает из вершины C равностороннего треугольника ABC со стороной a и ползёт по направлению к вершине A. Одновременно из A выползает с вдвое большей скоростью гусеница и ползёт к B. На каком расстоянии от B будет гусеница, когда расстояние между ней и улиткой станет наименьшим? Ответ. $\frac{3a}{7}$.

28. $\boxed{8}$ Рассматриваются всевозможные правильные треугольные призмы, у которых каждая боковая грань имеет периметр, равный a. Найти среди них призму с наибольшим объёмом. (В ответе указать боковое ребро такой призмы.) Ответ. $\frac{a}{6}$.

29. $\boxed{8}$ Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные призмы, сумма длин всех рёбер каждой из которых равна b. Найти среди них призму с наибольшим объёмом. (В ответе указать сторону основания такой призмы.)

Ответ. $\frac{b}{12}$.

30. $\boxed{8}$ Диагональ боковой грани правильной четырёхугольной призмы равна d. Найти длину бокового ребра, при которой призма имеет наибольший объём.

Ответ. $\frac{d\sqrt{3}}{3}$.

31. $\boxed{8}$ Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна p. Найти высоту пирамиды наибольшего объёма.

Ответ. $\frac{p\sqrt{3}}{3}$.

32. $\boxed{8}$ Найти радиус основания цилиндра, имеющего при данном объёме V наименьшую площадь полной поверхности. Ответ. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

33. $\boxed{3}$ Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6;\ 4]$ (рис. 73). Найти промежуток, которому принадлежат все точки экстремума функции $y = f(x)$.

Ответ. $[-3;\ 1]$.

34. $\boxed{5}$ Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;\ b]$. На рисунке 74 изображён график её производной $y = f'(x)$. Исследовать функцию $y = f(x)$ на монотонность. В ответе указать количество промежутков, на которых функция возрастает. Ответ. 3.

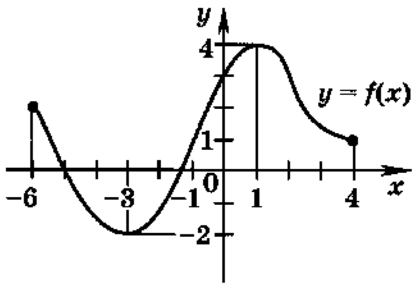


Рис. 73

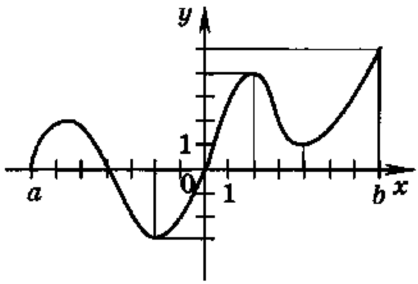


Рис. 74

35. $\boxed{6}$ Найти максимум функции $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x - 4\frac{1}{2}$.

Ответ. 9.

36. $\boxed{6}$ Найти наименьшее значение функции

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(9 - x^2).$$

Ответ. -2.

37. $\boxed{7}$ Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt[3]{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - 7}.$$

Ответ. -2.

38. $\boxed{8}$ При каком наибольшем целом значении m функция $f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}mx^2 - 5x + 2$ убывает на всей числовой прямой? Ответ. 7.

39. $\boxed{8}$ При каком значении a функция $y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x = 4$? Ответ. При $a = 8$.

Задания для интересующихся математикой

1. Фигура Φ ограничена параболой $y = x^2 + 1$ и прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$. В какой точке параболы следует провести касательную к ней, чтобы эта касательная отсекала от фигуры Φ трапецию наибольшей площади?

Ответ. В точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

2. 1) Среди всех прямых, касающихся графика функции $y = x^3 + 6x^2 + \frac{45}{4}x + 1$ в точке с положительной абсциссой, выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.

2) Среди всех прямых, касающихся графика функции $y = -x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + 2$ в точке с отрицательной абсциссой, выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.

Ответ. 1) 9; 2) $\frac{28}{27}$.

3. Рассматриваются прямоугольные параллелепипеды с отношением сторон $m : n$ и суммой всех измерений, равной a.

1) Найти высоту параллелепипеда, имеющего наибольший объём.

2) Установить, при каком отношении $m : n$ объём этого параллелепипеда будет наибольшим.

Ответ. 1) $\frac{a}{3}$; 2) 1.

§ 54. Первообразная

Справочные сведения

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

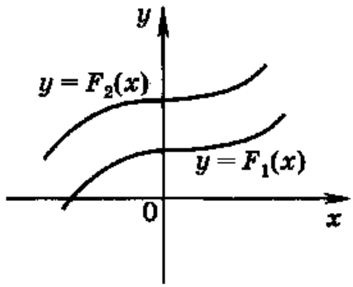


Рис. 75

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то функция $F(x) + C$, где C — любое число, также является первообразной функции $f(x)$ на этом промежутке.

Если функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке первообразную $F(x)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на промежутке имеет вид

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C — некоторое число. Графики любых двух первообразных $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции $f(x)$ получаются один из другого сдвигом вдоль оси Oy (рис. 75).

Для того чтобы выделить из совокупности первообразных функции $f(x)$ какую-либо первообразную $F_1(x)$, достаточно указать точку $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащую графику функции $y = F_1(x)$.

Примеры с решениями

1. Показать, что функция $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой прямой, если:

1) $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $f(x) = x^2$; 2) $F(x) = \frac{x^7}{7} + 4$, $f(x) = x^6$;

3) $F(x) = 2x^5 - 1$, $f(x) = 10x^4$;

4) $F(x) = -3\cos x$, $f(x) = 3\sin x$.

Решение.

1) Применяя правила дифференцирования и учитывая, что $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in N$, получаем

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2.$$

2) $\left(\frac{x^7}{7}+4\right)' = \frac{1}{7}\cdot 7x^6 = x^6.$

3) $(2x^5-1)' = 2\cdot 5x^4 = 10x^4.$
4) $(-3\cos x)' = -3(\cos x)' = (-3)(-\sin x) = 3\sin x.$

2. Для функции $f(x)$ найти такую первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку M:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $M(-1;\ 3)$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$, $M(4;\ 5)$.

Решение. 1) Функция $\frac{x^{p+1}}{p+1}$ — первообразная функции x^p для любого $p\neq -1$ при $x>0$. В частности, для функции $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x)=-\frac{1}{x}+C.$

По условию $F(-1)=3$, т. е. $3=1+C$, откуда $C=2$ и $F(x)=2-\frac{1}{x}.$

2) Одной из первообразных функции $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ является функция $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, а искомая первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$

Так как $F(4)=5$, то $5=\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}+C$, т. е. $5=\frac{16}{3}+C$, откуда $C=-\frac{1}{3}$, $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}.$

Ответ. 1) $F(x)=2-\frac{1}{x}$; 2) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}.$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Показать, что функция $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой прямой (1—6).

1. $\boxed{3}$ $F(x)=\frac{x^4}{4}$, $f(x)=x^3.$

2. $\boxed{3}$ $F(x) = \frac{2}{5}x^5$, $f(x) = 2x^4$.

3. $\boxed{3}$ $F(x) = -\frac{1}{16}x^8 + 2$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^7$.

4. $\boxed{3}$ $F(x) = 3\sin x + 4$, $f(x) = 3\cos x$.

5. $\boxed{3}$ $F(x) = -e^x + 5$, $f(x) = -e^x$.

6. $\boxed{4}$ $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + \sin 2x$.

Вариант II

Показать, что функция $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой прямой (1—6).

1. $\boxed{3}$ $F(x) = 2x^5$, $f(x) = 10x^4$.

2. $\boxed{3}$ $F(x) = \frac{x^6}{3}$, $f(x) = 2x^5$.

3. $\boxed{3}$ $F(x) = -\frac{1}{18}x^9 + 3$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^8$.

4. $\boxed{3}$ $F(x) = -2\cos x + 1$, $f(x) = 2\sin x$.

5. $\boxed{3}$ $F(x) = -2e^x + 3$, $f(x) = -2e^x$.

6. $\boxed{4}$ $F(x) = -3e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{4}\sin 4x$, $f(x) = -e^{\frac{x}{3}} + \cos 4x$.

§ 55. Правила нахождения первообразных

Справочные сведения

Таблица первообразных

Функция	Первообразная
x^p, $p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Правила нахождения первообразных (правила интегрирования)

Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке, то функция:

1) $F(x)+G(x)$ — первообразная функции $f(x)+g(x)$;

2) $aF(x)$ — первообразная функции $af(x)$, a — постоянная;

3) $\frac{1}{k}F(kx+b)$, где k, b — постоянные, $k \neq 0$, является первообразной функции $f(kx+b)$.

Пример с решением

Найти все первообразные данной функции:

1) $3x^2+\frac{2}{x}$; 2) $\sin 2x - e^{-x}$;

3) $5\cos(3x+2)-(x-1)^3+\frac{4}{\sqrt{x+4}}$;

4) $\frac{1}{x^2-x-2}$; 5) $\sin^2 2x$.

Решение.

1) По таблице первообразных и правилам интегрирования для функции x^p при $p=2$ и $p=-1$ находим все первообразные данной функции:

$$x^3+2\ln|x|+C,\ x\neq 0.$$

2) Первообразными функций $\sin 2x$ и e^{-x} являются соответственно функции $-\frac{\cos 2x}{2}$ и $-e^{-x}$, а совокупность всех первообразных данной функции записывается в виде

$$-\frac{\cos 2x}{2}+e^{-x}+C.$$

3) Первообразными функций $\cos(3x+2)$, $(x-1)^3$ и $(x+4)^{-\frac{1}{2}}$ являются соответственно функции $\frac{1}{3}\sin(3x+2)$, $\frac{(x-1)^4}{4}$ и $2\sqrt{x+4}$, а совокупность всех первообразных данной функции имеет вид

$$\frac{5}{3}\sin(3x+2)-\frac{(x-1)^4}{4}+8\sqrt{x+4}+C.$$

4) Так как $\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)$, то совокупность всех первообразных данной функции можно записать в виде

$$\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|)+C,\ x\neq 2,\ x\neq -1.$$

5) Используя равенство $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$, находим искомое множество всех первообразных данной функции:

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+C.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти все первообразные данной функции (1—17).

1. $\boxed{3}$ $3x^3-4x^2$.
2. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}$.
3. $\boxed{3}$ x^5-2x.
4. $\boxed{4}$ $-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}$.
5. $\boxed{4}$ $2\sin x+x^2$.
6. $\boxed{5}$ $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.
7. $\boxed{4}$ $4e^x+x^3$.
8. $\boxed{4}$ $\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$.
9. $\boxed{4}$ $\sin 2x+3\cos 3x$.
10. $\boxed{5}$ $4e^{-2x}+(x-1)^3$.
11. $\boxed{5}$ $\frac{2}{\sqrt{x+3}}-\sin^2 2x$.
12. $\boxed{6}$ $2\cos^2\frac{x}{2}$.
13. $\boxed{6}$ $\frac{x}{1+x}$.
14. $\boxed{7}$ $\frac{1}{x^2-5x+6}$.
15. $\boxed{7}$ $\cos x\ \sin 3x$.
16. $\boxed{7}$ $\frac{x^3}{x+1}$.
17. $\boxed{8}$ $\frac{2x+5}{x^2+5x+4}$.

Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M (18—21).

18. $\boxed{4}$ $f(x)=-\frac{1}{x^3}$, $M(1;\ -2)$.

19. $\boxed{5}$ $f(x) = \sin x - \cos x,\ M\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

20. $\boxed{5}$ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$, $M(1;\ -2)$.

21. $\boxed{5}$ $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x+1}$, $M(0;\ 2)$.

Найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, принимающую указанное значение в заданной точке (22—24).

22. $\boxed{5}$ $f(x) = \sin 3x - \frac{1}{2}\cos 2x,\ F(0) = 1$.

23. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 2(x+1)^3,\ F(0) = 0$.

24. $\boxed{7}$ $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^3},\ F(1) = -1$.

Вариант II

Найти все первообразные данной функции (1—17).

1. $\boxed{3}$ $2x^4 - 5x$.

2. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}$.

3. $\boxed{3}$ $x^6 + 3x^2$.

4. $\boxed{4}$ $\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}$.

5. $\boxed{4}$ $3\cos x - x$.

6. $\boxed{5}$ $x\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

7. $\boxed{4}$ $5e^x - 2x^4$.

8. $\boxed{4}$ $x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$.

9. $\boxed{4}$ $\frac{1}{3}\cos 6x - 4\sin 4x$.

10. $\boxed{5}$ $6e^{2x} + (x+1)^4$.

11. $\boxed{5}$ $\frac{3}{\sqrt{x-1}} - \cos^2 3x$.

12. $\boxed{6}$ $2\sin^2\frac{x}{2}$.

13. $\boxed{6}$ $\frac{x-1}{x+2}$.

14. $\boxed{7}$ $\frac{1}{x^2-3x-4}$.

15. $\boxed{7}$ $\sin x\ \cos 3x$.

16. $\boxed{7}$ $\frac{x^3}{x-1}$.

17. $\boxed{8}$ $\frac{2x+6}{x^2+6x+5}$.

Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M (18—21).

18. $\boxed{4}$ $f(x) = \frac{2}{x^4}$, $M(2; -1)$.

19. $\boxed{5}$ $f(x) = \cos x + \sin x$, $M(\pi; -2)$.

20. $\boxed{5}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$, $M(1; -3)$.

21. $\boxed{5}$ $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{x+2}$, $M(0; -2)$.

Найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, принимающую указанное значение в заданной точке (22—24).

22. $\boxed{5}$ $f(x) = \cos 5x - \frac{1}{6}\sin 3x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

23. $\boxed{6}$ $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + 4(x-1)^5$, $F(0) = 1$.

24. $\boxed{7}$ $f(x) = \frac{x-2}{(x+3)^3}$, $F(-1) = 1$.

§ 56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Справочные сведения

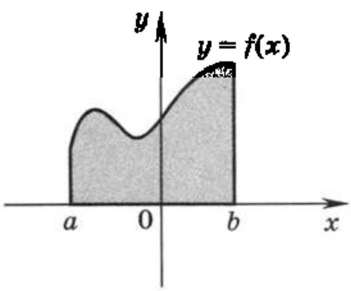


Рис. 76

Криволинейная трапеция — фигура, ограниченная отрезком $[a; b]$ оси Ox, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 76) и графиком непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, где $f(x) \geqslant 0$ при $x \in [a; b]$.

Если S — площадь криволинейной трапеции, $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$, то

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *формулой Ньютона — Лейбница.*

Примеры с решениями

1. Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

1) графиком функции $y = \sin\frac{x}{2}$, осью Ox и прямыми $x = \pi$ и $x = \frac{5\pi}{3}$;

2) графиком функции $y = 1 + |x|$, осью Ox и прямыми $x = -1$ и $x = 2$;

3) графиком функции $y = -x^2 + 2x$ и осью Ox.

Решение. Криволинейные трапеции изображены на рисунках 77—79.

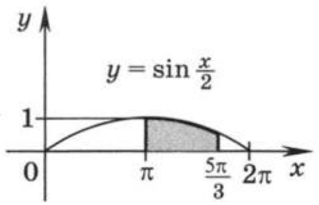


Рис. 77

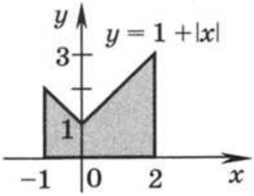


Рис. 78

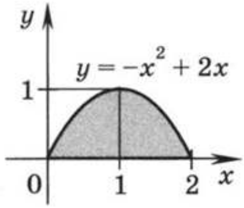


Рис. 79

2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезками $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 1$, $b = 3$, $f(x) = 6x - x^2$;

2) $a = -\frac{2\pi}{3}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \cos\frac{x}{2}$;

3) $a = -2$, $b = 2$, $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$.

Решение.

1) Применяя формулу (1), получаем

$$S = \int_1^3 (6x - x^2)\,dx = F(3) - F(1),$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции. Так как $3x^2$ и $\frac{x^3}{3}$ — первообразные функций $6x$ и x^2, то в качестве $F(x)$ можно взять функцию $F(x) = 3x^2 - \frac{x^3}{3}$. Тогда $F(3) = 27 - 9 = 18$, $F(1) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$, откуда $S = 18 - \frac{8}{3} = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$.

2) Функция $F(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ является первообразной функции $f(x) = \cos\frac{x}{2}$. По формуле (1) находим

$$S = \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

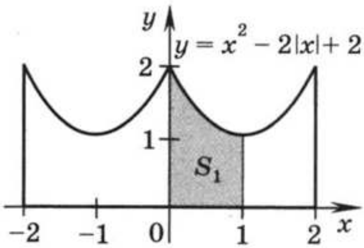


Рис. 80

3) Функция $y = x^2 - 2|x| + 2$ является чётной, её график симметричен относительно оси Oy (рис. 80); при $x \geqslant 0$ функция принимает вид $y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Кроме того, прямая $x = 1$ — ось симметрии параболы $y = (x-1)^2 + 1$, а точки (0; 0) и (2; 0) симметричны относительно прямой $x = 1$.

Поэтому $S = 4S_1$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ и графиком функции $y = (x-1)^2 + 1$. Так как

$$S_1 = \int_0^1 ((x-1)^2 + 1)\,dx = \left(\frac{(x-1)^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}, \text{ то}$$

$$S = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Ответ. 1) $15\frac{1}{3}$; 2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 3) $5\frac{1}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$ (1—4).

1. $\boxed{4}$ $a = 1$, $b = 3$, $f(x) = 6x - x^2$.

2. $\boxed{4}$ $a = -4$, $b = -2$, $f(x) = -\frac{1}{x}$.

3. $\boxed{5}$ $a = \frac{7\pi}{6}$, $b = \frac{3\pi}{2}$, $f(x) = |\sin x|$.

4. $\boxed{6}$ $a = -2$, $b = 4$, $f(x) = x^2 - 4|x| + 5$.

5. $\boxed{5}$ **Выяснить, какая из криволинейных трапеций, изображённых на рисунках 81—83, имеет площадь $S = 6$.**

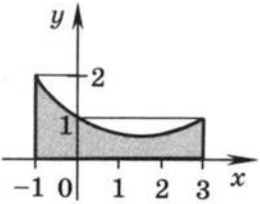


Рис. 81

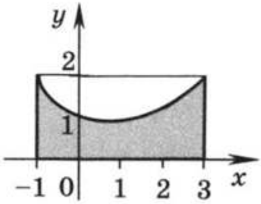


Рис. 82

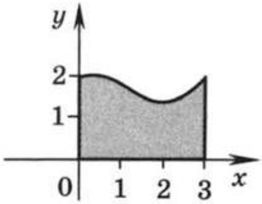


Рис. 83

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox (6—16).

6. $\boxed{4}$ $a = -1$, $b = 2$, $f(x) = x^2$.

7. $\boxed{4}$ $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

8. $\boxed{4}$ $a = 3$, $b = 5$, $f(x) = 6x - x^2$.

9. $\boxed{5}$ $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$.

10. $\boxed{4}$ $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{3}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

11. $\boxed{4}$ $a = 1$, $b = 27$, $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$.

12. $\boxed{5}$ $a = 1$, $b = 4$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

13. $\boxed{7}$ $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

14. $\boxed{7}$ $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = 1 + \sqrt{|x|}$.

15. $\boxed{7}$ $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sin^2 x$.

16. $\boxed{7}$ $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox (17—20).

17. $\boxed{4}$ $f(x) = 1 - x^2$.

18. $\boxed{4}$ $f(x) = 4x - x^2$.

19. $\boxed{5}$ $f(x) = 2 + x - x^2$.

20. $\boxed{5}$ $f(x) = |\cos x|$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Вариант II

Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$ (1—4).

1. $\boxed{4}$ $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = 5x - x^2$.

2. $\boxed{4}$ $a = -3$, $b = -1$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. $\boxed{5}$ $a = \pi$, $b = \frac{4\pi}{3}$, $f(x) = |\cos x|$.

4. $\boxed{6}$ $a = -6$, $b = 3$, $f(x) = x^2 - 6|x| + 10$.

5. $\boxed{5}$ **Выяснить, какая из криволинейных трапеций, изображённых** на рисунках 84—86, имеет площадь $S = 5$.

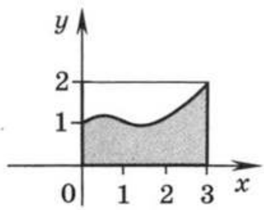


Рис. 84

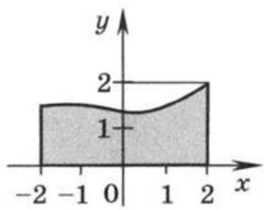


Рис. 85

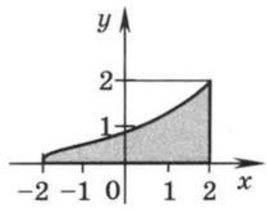


Рис. 86

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox (6—16).

6. $\boxed{4}$ $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = 2x^2$.

7. $\boxed{4}$ $a = 1$, $b = 3$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

8. $\boxed{4}$ $a = 2$, $b = 6$, $f(x) = 8x - x^2$.

9. $\boxed{5}$ $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = \frac{3}{x+2}$.

10. $\boxed{4}$ $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

11. $\boxed{4}$ $a = 1$, $b = 64$, $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$.

12. $\boxed{5}$ $a = 2,\ b = 5,\ f(x) = x - \dfrac{1}{x}.$

13. $\boxed{7}$ $a = 0,\ b = 2,\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}.$

14. $\boxed{7}$ $a = -1,\ b = 1,\ f(x) = 1 + 3\sqrt{|x|}.$

15. $\boxed{7}$ $a = \dfrac{3\pi}{4},\ b = \pi,\ f(x) = \cos^2 x.$

16. $\boxed{7}$ $a = 2,\ b = 4,\ f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox (17—20).

17. $\boxed{4}$ $f(x) = 4 - x^2.$

18. $\boxed{4}$ $f(x) = 2x - x^2.$

19. $\boxed{5}$ $f(x) = 6 + x - x^2.$

20. $\boxed{5}$ $f(x) = |\sin x|,\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi.$

§ 58. Вычисление площадей с помощью интегралов

Справочные сведения

Если фигура Φ ограничена отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a;\ b]$ функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ таких, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ при $x \in [a,\ b]$ (рис. 87), то площадь S фигуры Φ выражается формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

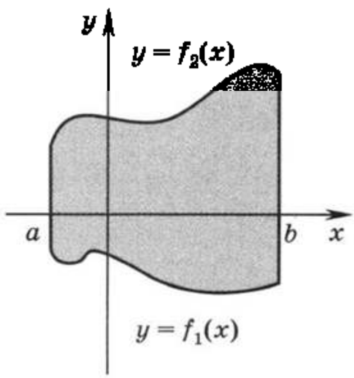


Рис. 87

Примеры с решениями

1. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной параболой $y = \dfrac{x^2}{4}$ и прямой $y = 3 - x$.

Решение. Парабола и прямая пересекаются в точках A и B (рис. 88), абсциссы которых являются корнями уравнения $\frac{x^2}{4} = 3 - x$, откуда после преобразований получим $x^2 + 4x - 12 = 0$, т. е. $x_1 = -6$, $x_2 = 2$.

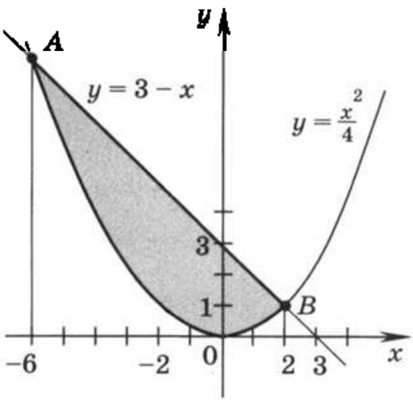


Рис. 88

Искомую площадь вычислим по формуле (1), где $a = -6$, $b = 2$, $f_2(x) = 3 - x$, $f_1(x) = \frac{x^2}{4}$. Следовательно,

$$S = \int_{-6}^{2}\left(3 - x - \frac{x^2}{4}\right)dx =$$

$$= \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-6}^{2} =$$

$$= \left(6 - 2 - \frac{2}{3}\right) - (-18 - 18 + 18) =$$

$$= \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 1$, параболой $y = x^2 - 2x + 2$ и касательной, проведённой к этой параболе в точке её пересечения с осью ординат.

Решение. Парабола пересекает ось Oy в точке $A(0;\ 2)$ (рис. 89), а уравнение касательной к параболе в этой точке имеет вид $y - 2 = kx$, где k — значение производной функции $f(x) = x^2 - 2x + 2$ при $x = 0$. $f'(x) = 2x - 2$, т. е. $k = f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$. Итак, касательная задаётся уравнением $y = 2 - 2x$ и пересекает ось Ox в точке $B(1;\ 0)$. Поэтому

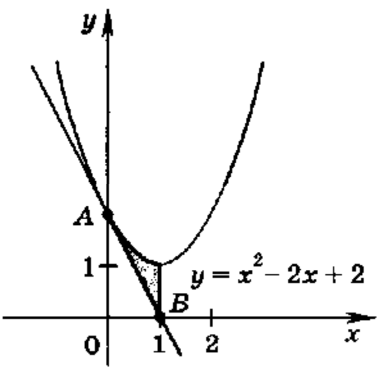


Рис. 89

$$S = \int_{0}^{1}(x^2 - 2x + 2 - (2 - 2x))\,dx =$$

$$= \int_{0}^{1}x^2dx = \frac{1}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (1—16).

1. $\boxed{4}$ $y = 3x + 18 - x^2$, $y = 0$.

2. $\boxed{4}$ $y = 1 + x^2$, $y = 2$.

3. $\boxed{5}$ $y = x^2 - x$, $y = 3x$.

4. $\boxed{5}$ $y = x^2$, $y = x + 2$.

5. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, $y = 10 - x$.

6. $\boxed{6}$ $y = 8x - x^2 - 7$, $y = x + 3$.

7. $\boxed{6}$ $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

8. $\boxed{6}$ $y = 2 + 4x - x^2$, $y = x^2 - 2x + 2$.

9. $\boxed{5}$ $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{5-x}{2}$.

10. $\boxed{6}$ $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

11. $\boxed{6}$ $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$.

12. $\boxed{6}$ $y = \frac{x^2}{2} - x + 2$, $y = x$, $x = 0$.

13. $\boxed{6}$ $y = (x-1)^2$, $y = 4(x-2)$, $y = 0$.

14. $\boxed{6}$ $y = \frac{4}{x^2}$, $y = x - 1$, $x = 1$.

15. $\boxed{6}$ $y = \sin x$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $y = \frac{2}{\pi}x$.

16. $\boxed{6}$ $y = x^2 - 4x$, $y = -4$, $x = 0$.

17. $\boxed{7}$ **Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 12$ и касательными к ней, проведёнными из точки $A(0;\ 3)$.**

18. $\boxed{7}$ **Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат, параболой $y = x^2 + 3$ и касательной к ней в точке $A(2;\ 7)$.**

Вариант II

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (1—16).

1. $\boxed{4}$ $y = 5x + 14 - x^2,\ y = 0.$

2. $\boxed{4}$ $y = 2 + x^2,\ y = 3.$

3. $\boxed{5}$ $y = x^2 + x,\ y = -3x.$

4. $\boxed{5}$ $y = x^2,\ y = 2 - x.$

5. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4,\ y = 10 + x.$

6. $\boxed{6}$ $y = 8x - x^2 - 2,\ y = x + 8.$

7. $\boxed{6}$ $y = x^2 + 4,\ y = 2x + 4 - x^2.$

8. $\boxed{6}$ $y = x^2 + 2x + 2,\ y = 2 - 4x - x^2.$

9. $\boxed{5}$ $y = -\frac{2}{x},\ y = \frac{x-5}{2}.$

10. $\boxed{6}$ $y = x^3 + 1,\ y = 1 + \sqrt{x}.$

11. $\boxed{6}$ $y = 2 + x^2,\ y = 2(1 + \sqrt{2x}).$

12. $\boxed{6}$ $y = \frac{x^2}{2} + x + 2,\ y = -x,\ x = 0.$

13. $\boxed{6}$ $y = -4(x + 2),\ y = (x + 1)^2,\ y = 0.$

14. $\boxed{6}$ $y = \frac{4}{x^2},\ y = -1 - x,\ x = -1.$

15. $\boxed{6}$ $y = \sin x$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$, и $y = \frac{2}{\pi}x.$

16. $\boxed{6}$ $y = 4x - x^2,\ y = 4,\ x = 0.$

17. $\boxed{7}$ **Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 11$ и касательными к ней, проведёнными из точки $A(0;\ 2)$.**

18. $\boxed{7}$ **Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат, параболой $y = x^2 + 3$ и касательной к ней в точке $A(-2;\ 7)$.**

Контрольная работа № 4

Вариант I

1. Доказать, что функция $F(x) = 3x + \sin x - e^{2x}$ является первообразной функции $f(x) = 3 + \cos x - 2e^{2x}$ на всей числовой прямой.
2. Найти первообразную F функции $f(x) = 2\sqrt{x}$, график которой проходит через точку $A\left(0; \frac{7}{8}\right)$.

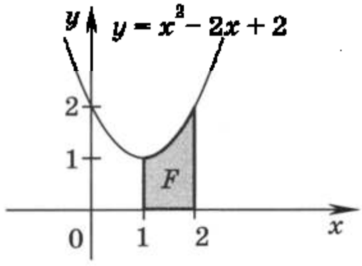


Рис. 90

3. Вычислить площадь фигуры F, изображённой на рисунке 90.

---

4. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 1 - 2x$ и графиком функции $y = x^2 - 5x - 3$.

Вариант II

1. Доказать, что функция $F(x) = e^{3x} + \cos x + x$ является первообразной функции $f(x) = 3e^{3x} - \sin x + 1$ на всей числовой прямой.
2. Найти первообразную F функции $f(x) = -3\sqrt[3]{x}$, график которой проходит через точку $A\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

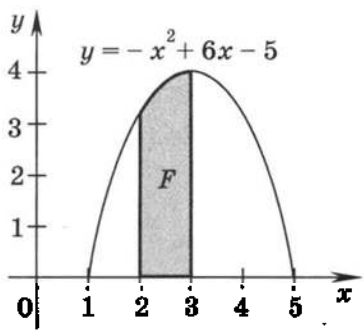


Рис. 91

3. Вычислить площадь фигуры F, изображённой на рисунке 91.

---

4. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 3 - 2x$ и графиком функции $y = x^2 + 3x - 3$.

Задания для подготовки к экзамену

1. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$. Ответ. $\frac{4}{3}$.

2. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ и $x = e$. Ответ. $\frac{e^2 - 3}{2}$.

3. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 6x + 9$ и осями координат. Ответ. 9.

4. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x - 2)(2x - 3)$ и осью Ox. Ответ. $\frac{1}{24}$.

5. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2 - 4$ и осями координат. Ответ. $\frac{8}{3}$.

6. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $y = x^2 + 3$ и прямой $x = 2$. Ответ. $\frac{26}{3}$.

7. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ и осью абсцисс.

   Ответ. $\frac{7}{6}$.

8. $\boxed{5}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{2}{x - 4}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = 3$. Ответ. $2 \ln 3$.

9. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{8}x^3$, $y = 3 - x$ и $y = -4x$. Ответ. 5.

10. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой, проходящей через вершину параболы и начало координат. Ответ. $\frac{4}{3}$.

11. $\boxed{5}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (1 - x)(x - 5)$, $y = 4$ и $x = 1$. Ответ. $\frac{8}{3}$.

12. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{4}x^3$ и $y = \sqrt{2x}$. Ответ. $\frac{5}{3}$.

13. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=6-x$ и $y=0$. Ответ. $\frac{22}{3}$.

14. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=(x+2)^3$, $y=1$ и $y=0$. Ответ. $\frac{19}{12}$.

15. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{4-x}$, $y=2+(x-4)^3$ и $y=3$. Ответ. $\frac{26}{3}$.

16. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$ и $y=2$. Ответ. $\frac{7}{3}-\ln 2$.

17. $\boxed{8}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x|y|=2$, $x=1$, $x=3$. Ответ. $4\ln 3$.

18. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x=-1$, параболой $y=x^2-2x+3$ и касательной к ней в точке с абсциссой 2. Ответ. 9.

19. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, касательной к нему в точке с абсциссой π и прямой $x=\frac{\pi}{2}$. Ответ. $\frac{\pi^2}{8}-1$.

20. $\boxed{8}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y-x^2=0$ и $y^2-x=0$. Ответ. $\frac{1}{3}$.

21. $\boxed{8}$ Фигура Φ ограничена линиями $y=-x^2+2x+3$ и $y=0$. Найти отношение площадей фигур, на которые фигура Φ делится графиком функции $y=(x+1)^2$. Ответ. 1 : 3.

22. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной осью Oy, параболой $y=2x-x^2$ и касательной к ней в точке с абсциссой 2. Ответ. $\frac{8}{3}$.

23. $\boxed{8}$ В каком отношении делится параболой $y=\frac{x^2}{2}+2$ площадь четырёхугольника $ABCD$, где $A\,(-4;\ 0)$, $B\,(-2;\ 4)$, $C\,(2;\ 4)$, $D\,(4;\ 0)$? Ответ. 2 : 7.

24. $\boxed{8}$ Для каждого $a<0$ найти площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x=2a$, $x=a$, $y=0$ и графиком функции $y=-\frac{3}{x}$. Сравнить площадь S с числом 3.

Ответ. $S=3\ln 2$, $S<3$.

25. $\boxed{4}$ Найти первообразную функции $f(x) = e^{2x} - \cos x$, график которой проходит через начало координат. Ответ. $\frac{1}{2}e^{2x} - \sin x - \frac{1}{2}$.

26. $\boxed{8}$ Найти ту первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 2x + 4$, график которой касается прямой $y = 6x + 3$. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми $y = 6x + 3$ и $y = 0$. Ответ. $F(x) = x^2 + 4x + 4$, $S = \frac{9}{4}$.

27. $\boxed{6}$ Для функции $y = 2\cos x$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};\, 24\right)$.

Ответ. $y = 2\sin x + 22$.

28. $\boxed{5}$ Указать первообразную функции $f(x) = e^x - 2x$. Ответ. $F(x) = e^x - x^2$.

29. $\boxed{6}$ Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$. Ответ. 32.

§ 60. Правило произведения

Справочные сведения

Правило произведения. Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

Примеры с решениями

1. Для написания реферата студенту нужно посетить десять сайтов. В первый вечер он может посетить только два из них. Сколько вариантов выбора (с учётом последовательности изучения сайтов) существует у студента в этот вечер?

Решение. Первым для изучения может быть выбран любой из 10 сайтов, вторым — любой из 9 оставшихся. Согласно правилу произведения существует $10 \cdot 9 = 90$ вариантов выбора двух последовательных для изучения сайтов.

Ответ. 90 вариантов.

2. Сколько различных трёхзначных чисел с разными цифрами можно записать, используя цифры 0, 2, 4, 6, 8?

Решение. В качестве первой цифры может быть выбрана любая из четырёх цифр 2, 4, 6, 8 ($n = 4$). В качестве второй — любая из четырёх неиспользованных ($m = 4$), а в качестве третьей — любая из трёх оставшихся ($k = 3$). Применяя дважды правило произведения, найдём число всевозможных трёхзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи: $(m \cdot n) \cdot k = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

Ответ. 48 чисел.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ Сколько различных двухбуквенных кодов (буквы в коде могут быть одинаковыми) можно составить с помощью букв *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*?

2. $\boxed{4}$ Сколько различных двузначных чисел с разными цифрами можно составить, используя цифры:

1) 1 и 5; 2) 0 и 6;
3) 2, 4 и 6; 4) 0, 1 и 8;
5) 3, 4, 5 и 6; 6) 0, 2, 3, 4 и 6?

3. $\boxed{5}$ Сколько различных трёхзначных чисел с разными цифрами можно записать с помощью цифр:

1) 4, 6 и 8; 2) 0, 2 и 7;
3) 1, 2, 3 и 4; 4) 0, 9, 8 и 7;
5) 3, 4, 5, 6 и 7; 6) 0, 2, 4, 6 и 8?

4. $\boxed{5}$ Сколько различных трёхбуквенных слов можно записать с помощью букв:

1) *а* и *п*; 2) *к*, *а* и *с*?

5. $\boxed{6}$ Сколькими способами можно составить расписание шести уроков на один день таким образом, чтобы был сдвоенный урок физики и по одному уроку, выбранному из других различных четырёх учебных предметов?

6. $\boxed{7}$ Имеются 6 книг, причём две из них одного автора, а остальные книги отличаются от этих двух и различны между собой. Сколькими способами можно расставить эти книги на книжной полке в ряд так, чтобы книги одного автора стояли рядом? (Порядок расположения книг в паре также имеет значение.)

7. $\boxed{8}$ Сколько различных чётных четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 5, 6, 7, если каждую цифру можно использовать в записи не более одного раза?

8. $\boxed{9}$ Сколько различных четырёхзначных чисел, кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую цифру можно использовать в записи не более одного раза?

Вариант II

1. $\boxed{3}$ Сколько различных двухбуквенных кодов (буквы в коде могут быть одинаковыми) можно составить с помощью букв *к*, *л*, *м*, *н*, *о*?

2. $\boxed{4}$ Сколько различных двузначных чисел с разными цифрами можно составить, используя цифры:

1) 3 и 7; 2) 0 и 9;
3) 1, 3 и 5; 4) 0, 2 и 7;
5) 5, 6, 7 и 8; 6) 0, 3, 4, 5, 7 и 9?

3. $\boxed{5}$ Сколько различных трёхзначных чисел с разными цифрами можно записать с помощью цифр:
1) 3, 5 и 7; 2) 0, 8 и 9;
3) 9, 8, 7 и 6; 4) 0, 2, 4 и 5;
5) 5, 6, 7, 8 и 9; 6) 0, 1, 3, 4, 5 и 6?

4. $\boxed{5}$ Сколько различных трёхбуквенных слов можно записать с помощью букв:
1) *б* и *а*; 2) *о*, *р* и *п*?

5. $\boxed{6}$ Сколькими способами можно составить расписание пяти уроков на один день таким образом, чтобы был сдвоенный урок алгебры и ещё по одному уроку, выбранному из других различных трёх учебных предметов?

6. $\boxed{7}$ Имеются 7 книг, причём две из них одного автора, а остальные отличаются от этих двух и различны между собой. Сколькими способами можно расставить эти книги на книжной полке в ряд так, чтобы книги одного автора стояли рядом? (Порядок расположения книг в паре не имеет значения.)

7. $\boxed{8}$ Сколько различных нечётных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, если каждую цифру можно использовать в записи не более одного раза?

8. $\boxed{9}$ Сколько различных трёхзначных чисел, кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую цифру можно использовать в записи не более одного раза?

§ 61. Перестановки

Справочные сведения

Перестановками из n элементов называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n.

Произведение первых n ($n > 1$) натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

По определению $1! = 1$.

$$P_n = n!$$

Примеры с решениями

1. Найти значение: 1) P_6; 2) $\frac{P_8 - P_5}{P_3}$.

Решение. 1) $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

2) $\frac{P_8 - P_5}{P_3} = \frac{P_5(6 \cdot 7 \cdot 8 - 1)}{P_3} = 4 \cdot 5 \cdot 335 = 6700$.

2. Сколькими способами можно установить очерёдность ухода в отпуск (по одному человеку в месяц) семи сотрудников офиса?

Решение. Задача сводится к подсчёту числа перестановок из 7 элементов: $P_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Ответ. 5040 способами.

3. Решить уравнение $\frac{P_{n-2}}{P_n} = \frac{1}{6}$.

Решение. Согласно обозначению числа перестановок имеем $n - 2 \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ и $n \in N$, т. е. $n \geqslant 3$ при $n \in N$. При этих условиях заданное уравнение можно записать так:

$$\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{6}, \quad n^2 - n - 6 = 0,$$

откуда $n_1 = -2$, $n_2 = 3$.

Ответ. $n = 3$.

Задачи для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ Найти значение: 1) P_1; 2) $P_7 - P_5$.
2. $\boxed{3}$ Сколькими способами можно поставить 6 различных автомобилей в шести одноместных боксах?
3. $\boxed{4}$ Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6 так, чтобы:
   1) первой была цифра 5;
   2) первой была цифра 3, а последней — цифра 2;
   3) первыми двумя были цифры 5 и 6 в любой последовательности.
4. $\boxed{5}$ Найти значение выражения:

   1) $\frac{15!}{13!}$; 2) $\frac{6! \cdot 3!}{8!}$; 3) $\frac{20!}{18! \cdot 2!}$.

5. $\boxed{6}$ Упростить выражение, если m — натуральное число:

1) $\dfrac{P_{m+2}}{P_{m+1}}$; 2) $\dfrac{(m+5)!}{(m+2)!\cdot(m+4)}$.

6. $\boxed{7}$ Решить уравнение: 1) $\dfrac{P_{n+1}}{P_{n-1}} = 20$; 2) $P_{n+2} = 20P_n$.

7. $\boxed{8}$ Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 15, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

8. $\boxed{8}$ Сколькими способами можно разместить 6 различных автомобилей в семи одноместных боксах?

Вариант II

1. $\boxed{3}$ Найти значение: 1) P_2; 2) $P_6 - P_4$.

2. $\boxed{3}$ Сколькими способами 5 различных подарочных наборов можно разместить в пяти имеющихся коробках (по одному подарку в коробке)?

3. $\boxed{4}$ Сколько различных семизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы:
1) последней была цифра 2;
2) последней была цифра 1, а первой — цифра 4;
3) последними двумя были цифры 1 и 2 именно в этой последовательности.

4. $\boxed{5}$ Найти значение выражения:

1) $\dfrac{9!}{11!}$; 2) $\dfrac{10!}{8!\cdot 2!}$; 3) $\dfrac{15!\cdot 4!}{18!}$.

5. $\boxed{6}$ Упростить выражение, если n — натуральное число:

1) $\dfrac{P_{n+3}}{P_{n+4}}$; 2) $\dfrac{(n+5)!\cdot(n+6)}{(n+7)!}$.

6. $\boxed{7}$ Решить уравнение:

1) $\dfrac{P_n}{P_{n-2}} = 30$; 2) $P_{n+3} = 42P_{n+1}$.

7. $\boxed{8}$ Сколько различных четырёхзначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 6, можно записать с помощью цифр 1, 3, 4 и 7?

8. $\boxed{8}$ Сколькими способами 5 различных подарочных наборов можно разместить в шести имеющихся коробках (в коробку помещается не более одного набора)?

§ 62. Размещения

Справочные сведения

Размещениями из m элементов по n элементов ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, выбранных из данных m различных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из m элементов по n обозначают A_m^n.

$$A_m^n = \underbrace{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}_{n \text{ множителей}}. \tag{1}$$

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \tag{2}$$

По определению $0! = 1$.

Примеры с решениями

1. Найти: 1) A_9^2; 2) A_6^4.

Решение. 1) Согласно формуле (1) находим

$$A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72.$$

2) По формуле (2) находим

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360.$$

2. Сколькими способами три человека могут занять 1-е, 2-е и 3-е призовые места в последнем туре олимпиады (одно место может занять только один участник), если на эти места претендуют 10 человек.

Решение. Задача сводится к подсчёту упорядоченных троек участников, выбираемых из 10 человек, т. е. к подсчёту числа размещений из 10 по 3:

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Ответ. 720 способами.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ Найти: 1) A_{12}^2; 2) A_{11}^3; 3) A_{10}^4.

2. $\boxed{4}$ Найти значение выражения:

1) $A_6^1 + A_5^2$; 2) $A_4^4 - A_8^2$;

3) $\dfrac{A_8^3 + A_7^2}{A_7^3}$; 4) $\dfrac{A_4^3 \cdot A_5^2}{A_6^3}$.

3. $\boxed{5}$ Турагентство располагает экскурсоводами по восьми древнерусским городам. Агентство предложило клиенту выбрать маршрут посещения трёх (из предложенных восьми) городов в любой последовательности. Сколько существует способов организации такого маршрута?

4. $\boxed{5}$ Сколько существует способов обозначения вершин треугольной пирамиды с помощью букв A, B, C, D, E?

5. $\boxed{5}$ Сколько различных четырёхзначных чисел (все цифры которых различны) можно записать, используя цифры 2, 4, 5, 6, 7, 8?

6. $\boxed{5}$ Администрация города решила переименовать 3 улицы. К выбору были предложены 7 названий. Сколькими способами могут быть переименованы эти 3 улицы?

7. $\boxed{6}$ Решить относительно m уравнение:

1) $A_m^2 = 90$; 2) $A_{m+2}^2 = 56$; 3) $A_m^4 = 14 \cdot A_{m-2}^3$.

8. $\boxed{7}$ Упростить выражение $\dfrac{P_{12-n} \cdot A_{10}^n}{P_{11}}$, где $n \leqslant 10$.

9. $\boxed{8}$ Юноше на один день дали 7 дисков с популярной музыкой. Выяснилось, что в этот день он успеет прослушать только 4 диска в любой последовательности. Сколькими способами юноша может организовать в этот день прослушивание дисков?

10. $\boxed{9}$ Имеются 10 различных папок с документами. За каждой папкой закрепляют свой номер таким образом, что номер должен быть трёхзначным с различными цифрами, выбираемыми из набора 1, 3, 5, 7, 9. Сколькими способами могут быть пронумерованы имеющиеся 10 папок?

Вариант II

1. $\boxed{3}$ Найти: 1) A_{13}^2; 2) A_{10}^3; 3) A_8^5.

2. $\boxed{4}$ Найти значение выражения:

1) $A_4^2 + A_8^1$; 2) $A_5^5 - A_7^2$;

3) $\dfrac{A_6^2}{A_7^4 + A_6^3}$; 4) $\dfrac{A_5^3 \cdot A_4^2}{A_4^3}$.

3. $\boxed{5}$ Сколькими способами можно организовать уход в отпуск троих сотрудников фирмы в 3 летних месяца (по одному сотруднику в месяц), выбирая их из семи сотрудников фирмы?

4. $\boxed{5}$ Сколько различных трёхзначных чисел (все цифры в которых различны) можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 7, 9?

5. $\boxed{5}$ Сколькими способами можно дать имена двоим родившимся близнецам-мальчикам, выбирая их из 7 имён, понравившихся родителям?

6. $\boxed{5}$ У девочки есть 6 различных маек и 4 наклейки. Сколькими способами можно поместить эти наклейки на четырёх майках из имеющихся шести (по одной на каждую)?

7. $\boxed{6}$ Решить относительно m уравнение:

1) $A_m^2 = 110$; 2) $A_{m+3}^2 = 72$; 3) $A_{m+1}^5 = 30 \cdot A_{m-1}^4$.

8. $\boxed{7}$ Упростить выражение $\dfrac{P_{12}}{P_{13-n} \cdot A_{11}^n}$, где $n \leqslant 11$.

9. $\boxed{8}$ Строительная фирма подготовила к продаже 8 щитовых домов. В качестве подарочной акции было принято решение утеплить три произвольно выбранных дома. В наличии имелись утеплители трёх различных видов. Сколькими способами можно утеплить три произвольно выбранных дома при условии, что все утеплённые дома будут снабжены разными утеплителями?

10. $\boxed{9}$ Шесть игроков волейбольной команды выбирают себе двузначные номера на футболки. Номера, в свою очередь, составляются из цифр 2, 4, 6, 8 при условии, что цифры в номере различны. Сколькими способами можно осуществить присвоение номеров игрокам команды?

§ 63. Сочетания и их свойства

Справочные сведения

Сочетаниями из m элементов по n в каждом ($n \leqslant m$) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, выбранных из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого, по крайней мере, одним элементом (порядок расположения элементов в соединениях значения не имеет).

Число всевозможных сочетаний из m элементов по n обозначают C_m^n.

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n};\ \ C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!},\ \text{где } m \geqslant n.$$

Свойства числа сочетаний:

1) $C_m^n = C_m^{m-n}$; 2) $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) C_{12}^2; 2) C_{21}^0; 3) C_{18}^{15}.

Решение.

1) $C_{12}^2 = \dfrac{A_{12}^2}{P_2} = \dfrac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$;

2) $C_{21}^0 = \dfrac{21!}{0!(21-0)!} = \dfrac{21!}{1 \cdot 21!} = 1$;

3) $C_{18}^{15} = \dfrac{18!}{15!(18-15)!} = \dfrac{18!}{15! \cdot 3!} = \dfrac{16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816$.

2. Из набора домино вынимают случайным образом 2 костяшки. Сколькими различными способами это можно сделать?

Решение. В наборе домино 28 различных костяшек. Две из них (без учёта их порядка в паре) можно вынуть C_{28}^2 способами, т. е. $\dfrac{28!}{2! \cdot 26!} = 27 \cdot 14 = 378$ способами.

Ответ. 378 способами.

3. Найти значение выражения $C_{30}^2 - C_{29}^2$, предварительно его упростив.

Решение. По второму свойству числа сочетаний $C_{30}^2 = C_{29}^1 + C_{29}^2$, поэтому

$$C_{30}^2 - C_{29}^2 = C_{29}^1 + C_{29}^2 - C_{29}^2 = C_{29}^1 = \frac{A_{29}^1}{P_1} = 29.$$

Ответ. 29.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{4}$ Вычислить:

1) C_6^0; 2) C_9^1; 3) C_{10}^9; 4) C_{11}^{11};

5) C_{25}^2; 6) C_{27}^{25}; 7) C_8^3; 8) C_7^4.

2. $\boxed{5}$ Сколькими способами можно из семи имеющихся в продаже роз выбрать 3 розы для подарочного букета?

3. $\boxed{5}$ В хоре 15 мужчин-теноров. Сколькими способами из их числа можно выбрать 13 певцов для гастрольной поездки?

4. $\boxed{6}$ В пространстве имеется 6 точек, причём никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных треугольных пирамид с вершинами в этих точках можно построить?

5. $\boxed{7}$ Из колоды карт (36 листов) выбирают 2 карты трефовой масти и 3 карты бубновой масти. Сколькими способами можно осуществить такой выбор?

6. $\boxed{7}$ Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_{16}^{14} + C_{16}^{15}$; 2) $C_9^6 + C_9^7 + C_{10}^8$;

3) $C_{24}^3 - C_{23}^3$; 4) $C_{38}^4 - C_{37}^3$.

7. $\boxed{8}$ Решить относительно m уравнение:

1) $C_{m+2}^2 + C_{m+2}^3 = 7(m+3)$;

2) $14C_{m+1}^3 = 5C_{m+3}^3$;

3) $C_{5m+2}^{5m} = 66$.

Вариант II

1. $\boxed{4}$ Вычислить:

1) C_{12}^{0}; 2) C_{10}^{1}; 3) C_{13}^{12}; 4) C_{16}^{16};

5) C_{18}^{2}; 6) C_{32}^{30}; 7) C_{9}^{6}; 8) C_{8}^{4}.

2. $\boxed{5}$ В магазин привезли мороженое шести видов по одной цене. У Тани денег хватало только на 4 порции. Сколькими способами Таня может купить 4 порции мороженого разных сортов?

3. $\boxed{5}$ В шахматном кружке одинаковые успехи у 12 юношей. Сколькими способами руководитель кружка может выбрать из их числа 10 юношей для участия в турнире?

4. $\boxed{6}$ В пространстве имеется 5 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько можно построить различных отрезков с концами в этих точках?

5. $\boxed{7}$ Из колоды карт (36 листов) выбирают 7 карт червовой масти и 2 карты трефовой масти. Сколькими способами можно осуществить такой выбор?

6. $\boxed{7}$ Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_{14}^{12}+C_{14}^{13}$; 2) $C_{11}^{8}+C_{11}^{9}+C_{12}^{10}$;

3) $C_{35}^{2}-C_{34}^{2}$; 4) $C_{26}^{3}-C_{25}^{2}$.

7. $\boxed{8}$ Решить относительно m уравнение:

1) $C_{m+3}^{2}+C_{m+3}^{3}=\dfrac{10}{3}(m+2)$;

2) $5C_{m-1}^{3}=C_{m+1}^{4}$;

3) $C_{4m+3}^{4m+1}=105$.

§ 64. Бином Ньютона

Справочные сведения

Формула *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1}b + C_m^2 a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n a^{m-n}b^n + \\ + \ldots + C_m^{m-1}ab^{m-1} + C_m^m b^m.$$

Биномиальные коэффициенты C_m^n находят по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

или с помощью *треугольника Паскаля*:

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

Пример с решением

Записать разложение бинома $(2x-1)^5$.

Решение. $(2x-1)^5 = (2x+(-1))^5 = C_5^0(2x)^5 + C_5^1(2x)^4 \times$
$\times (-1) + C_5^2(2x)^3 \cdot (-1)^2 + C_5^3(2x)^2 \cdot (-1)^3 + C_5^4(2x) \cdot (-1)^4 + C_5^5 \times$
$\times (-1)^2 = 1 \cdot 32x^5 + 5 \cdot 16x^4(-1) + 10 \cdot 8x^3 \cdot 1 + 10 \cdot 4x^2(-1) +$
$+ 5 \cdot 2x \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1.$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Записать разложение бинома (1—3).

1. $\boxed{5}$ 1) $(a+1)^7$; 2) $(1-b)^9$.
2. $\boxed{6}$ 1) $(1+2x)^8$; 2) $(2-c)^6$.
3. $\boxed{6}$ 1) $\left(4b-\frac{1}{4}\right)^4$; 2) $\left(\frac{x}{3}+3\right)^5$.

4. $\boxed{6}$ Возвести в степень:

1) $(1-\sqrt{7})^5$; 2) $(\sqrt{3}+1)^6$.

5. $\boxed{7}$ Найти пятый член разложения бинома:

1) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^{10}$; 2) $(b+\sqrt{b})^{11}$.

6. $\boxed{8}$ Найти значение суммы:

1) $C_8^0+C_8^1+C_8^2+C_8^3+C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8$;

2) $C_9^5+C_9^6+C_9^7+C_9^8+C_9^9$;

3) $C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6$.

7. $\boxed{9}$ Найти член разложения бинома:

1) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}\right)^{20}$, содержащий a^5;

2) $\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{5}}\right)^{25}$, содержащий x^{13}.

Вариант II

Записать разложение бинома (**1—3**).

1. $\boxed{5}$ 1) $(x+1)^8$; 2) $(a-1)^6$.
2. $\boxed{6}$ 1) $(2+y)^7$; 2) $(1-2a)^8$.
3. $\boxed{6}$ 1) $\left(\frac{1}{3}-3x\right)^4$; 2) $\left(\frac{b}{4}+4\right)^5$.

4. $\boxed{6}$ Возвести в степень:

1) $(\sqrt{5}-1)^6$; 2) $(1+\sqrt{6})^4$.

5. $\boxed{7}$ Найти шестой член разложения бинома:

1) $(\sqrt{x}-x)^8$; 2) $\left(\frac{1}{b}+b\right)^{12}$.

6. $\boxed{8}$ Найти значение суммы:

1) $C_9^9+C_9^8+C_9^7+C_9^6+C_9^5+C_9^4+C_9^3+C_9^2+C_9^1+C_9^0$;

2) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3$;

3) $C_8^1+C_8^2+C_8^3+C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7$.

7. $\boxed{9}$ Найти член разложения бинома:

1) $\left(b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{14}$, содержащий b^6;

2) $\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^{24}$, содержащий x^5.

Контрольная работа № 5

Вариант I

1. Найти значение выражения:

   1) $\frac{12!}{P_{10}}$; 2) $A_6^3 + C_7^2$.

2. Сколькими способами можно выбрать председателя ЖСК и его заместителя из 20 членов ЖСК?
3. Записать разложение бинома $(a - 2)^6$.

---

4. Решить относительно m уравнение

$$C_{m+5}^3 = 8(m+4).$$

5. Из трёх последовательных букв и присоединённого к ним четырёхзначного числа составляют код. Буквы без повторения выбирают из набора: *б*, *в*, *г*, *д*, *ж*, *з*. Число записывают с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в числе могут повторяться). Сколько различных кодов, удовлетворяющих данному условию, можно составить?

Вариант II

1. Найти значение выражения:

   1) $\frac{P_7}{10!}$; 2) $C_8^3 - A_6^2$.

2. Сколькими способами из вазы с 8 различными конфетами можно взять 3 конфеты?
3. Записать разложение бинома $(3 - x)^5$.

---

4. Решить относительно m уравнение

$$A_{m-3}^3 = 24(m-4).$$

5. Из четырёх последовательных букв и присоединённого к ним трёхзначного числа составляют шифр. Буквы (с возможным повторением) выбирают из букв *а*, *е*, *и*, *о*, *у*. Число записывают разными цифрами, выбираемыми из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько различных шифров, удовлетворяющих данному условию, можно составить?

Глава XII. Элементы теории вероятностей

§ 65. События

Справочные сведения

По отношению к некоторому испытанию (опыту) событие может быть *случайным* (может произойти, а может и не произойти в ходе этого испытания), *достоверным* (обязательно произойдёт) или *невозможным* (заведомо не произойдёт).

Элементарные события — это события, которые могут произойти в одном испытании и которые удовлетворяют следующим условиям:

1) обязательно происходит одно из них в результате испытания;

2) происходит только одно из них (взаимно исключают друг друга);

3) не разделяются на более простые события.

Несовместные события — события, которые могут произойти в одном испытании, причём появление одного из них исключает появление другого.

Если в одном испытании могут произойти события, шансы наступления которых одинаковы, то эти события называют *равновозможными*.

Примеры с решениями

1. Установить, достоверным, невозможным или случайным является событие:

1) в результате броска игрального кубика появилось 3 очка;

2) в Москве наступило 30 февраля;

3) на случайно вынутой из полного набора костяшке домино общее число очков меньше 13.

Решение.

1) Так как в результате бросания могут появиться: 1 очко, 2 очка, 3 очка, 4 очка, 5 очков или 6 очков, то появление 3 очков — случайное событие.

2) В григорианском календаре (по которому живут в нашей стране) отсутствует дата 30 февраля, поэтому данное событие — невозможное.

3) На костяшках домино самое большое общее число очков — 12 (что меньше, чем 13), значит, данное событие достоверное.

2. Перечислить элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными:

1) на стол бросают отлитый из стали тетраэдр, грани которого пронумерованы числами от 1 до 4;

2) наугад вынимают из коробки, в которой находятся 1 белый и 2 чёрных шара, один шар и определяют его цвет.

Решение. 1) Элементарными исходами являются: падение тетраэдра на одну из граней, на которой записано число 1, 2, 3 или 4; так как тетраэдр имеет одинаковые грани (предположительно, литьё из стали не даёт внутренних полостей), то все исходы равновозможны.

2) Элементарных исходов при определении цвета шара два: появление белого и появление чёрного шара; эти исходы не являются равновозможными, так как чёрных шаров больше, чем белых.

3. Определить, являются события A и B совместными или несовместными:

1) A — появление 4 очков, B — появление чётного числа очков в результате одного броска игральной кости;

2) A — появление костяшки «пусто — пусто», B — появление костяшки «один — три» в результате изъятия одной костяшки из полного набора домино.

Решение. 1) Так как 4 — число чётное, то события A и B — совместные.

2) Так как данные костяшки различны, а вынимается одна костяшка, то события A и B несовместные.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ Установить, каким событием (случайным, достоверным или невозможным) является событие:

   1) в результате одного броска игрального кубика появилось число 10;

   2) наугад вынутая из колоды карта оказалась восьмёркой треф;

   3) наугад названное натуральное число оказалось целым числом.

2. $\boxed{4}$ Перечислить все элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными, если испытание состоит в следующем:

   1) из всех карт бубновой масти, взятых из одной полной колоды (36 листов), извлекается одна карта и определяется её название;

2) из ящика, в котором находятся 3 зелёных и 2 красных шара, извлекается один шар и определяется его цвет.

3. $\boxed{4}$ Установить, являются совместными или несовместными события A и B, если:
1) A — выпадение 3 очков, B — выпадение нечётного числа очков в результате одного броска игральной кости;
2) A — появление валета, B — появление карты червовой масти в результате одного изъятия одной карты из полной колоды;
3) деревянный цилиндр бросают на пол и определяют фигуру, которой цилиндр касается пола: событие A — касается только отрезком, событие B — касается кру́гом.

Вариант II

1. $\boxed{3}$ Установить, каким событием (случайным, достоверным или невозможным) является событие:
1) наугад названное рациональное число оказалось натуральным числом;
2) наугад вынутый из коробки с цветными карандашами один карандаш оказался простым;
3) изъятая из полного набора домино костяшка оказалась «пусто — шесть».

2. $\boxed{4}$ Перечислить элементарные исходы испытания и установить, являются ли они равновозможными, если испытание состоит в следующем:
1) из коробки, в которой находятся 2 красных и 4 чёрных шара, извлекают один из них и определяют его цвет;
2) из всех карт трефовой масти, взятых из одной полной колоды (36 листов), извлекают одну карту и определяют её название.

3. $\boxed{4}$ Установить, являются совместными или несовместными события B и C, если:
1) B — появление карты с картинкой, C — появление карты червовой масти в результате одного изъятия одной карты из полной колоды карт;
2) B — падение кнопки плашмя, C — падение кнопки на остриё в результате одного бросания кнопки;
3) B — выпадение 4 очков, C — выпадение числа очков, не меньшего 4, в результате одного бросания игральной кости.

§ 66. Комбинации событий. Противоположное событие

Справочные сведения

Суммой (объединением) событий A и B, которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ или $A \cup B$.

Произведением (пересечением) событий A и B, которые могут произойти в одном испытании, называют событие, состоящее в наступлении и того и другого события. Произведение событий A и B обозначают AB или $A \cap B$.

Событие $\bar{A}$ называют противоположным событию A, если событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Примеры с решениями

1. Из полного набора домино изымают одну костяшку. Рассматриваются события: A — вынута костяшка с дублем, B — на вынутой костяшке присутствует половинка с шестью очками. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

Ответ. Событие $A + B$ состоит в изъятии костяшки либо с дублем, либо содержащей 6 очков; событие AB состоит в изъятии костяшки «шесть — шесть».

2. Установить, в чём состоит событие $\bar{A}$, если событие A — появление числа очков, не большего 5, в результате одного бросания игрального кубика.

Решение. Событие A состоит в появлении одного из чисел 1, 2, 3, 4 или 5. Все элементарные исходы испытания (их шесть): появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков. Значит, событие $\bar{A}$ состоит в появлении 6 очков ($\bar{A}$ наступает тогда, когда не наступает событие A).

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{4}$ Из колоды карт вынимают одну карту. Событие A — изъятие карты с числом, B — изъятие карты червовой масти. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

2. $\boxed{4}$ Наугад названо одно из первых 12 натуральных чисел. Событие A — названо чётное число, B — названо число, кратное 3. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

3. $\boxed{4}$ Бросают два игральных кубика — белый и красный. Событие A — на белом кубике появилось число очков, меньшее 3; событие B — на красном кубике выпало 6 очков. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

4. $\boxed{5}$ Бросают два игральных кубика и рассматривают события: A — на одном кубике появилось число очков, меньшее 3; B — на другом кубике выпало 6 очков. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

5. $\boxed{5}$ Определить событие, являющееся противоположным событию:

   1) в результате броска игрального кубика выпало чётное число очков;

   2) из колоды карт изъята дама чёрной масти;

   3) хотя бы на одном из брошенных двух игральных кубиков появилось 6 очков.

6. $\boxed{5}$ Пусть A и B — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие:

   1) противоположное событию B;

   2) состоящее в том, что произошло хотя бы одно из этих событий;

   3) состоящее в том, что произошли оба этих события.

7. $\boxed{7}$ Пусть A и B — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие, состоящее в том, что произошло только событие B, и проиллюстрировать это событие с помощью кругов Эйлера.

Вариант II

1. $\boxed{4}$ Из колоды карт вынимают одну карту. Событие A — изъятие карты трефовой масти, B — изъятие карты с картинкой. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

2. $\boxed{4}$ Наугад названо одно из первых 18 натуральных чисел. Событие A — названо число, не меньшее 11, событие B — названо число, кратное 4. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

3. $\boxed{4}$ Бросают два игральных кубика — жёлтый и белый. Событие A — на жёлтом кубике выпало 5 очков; событие B — на белом кубике выпало число очков, не меньшее 5. В чём состоит событие $A + B$; событие AB?

4. $\boxed{5}$ Бросают два игральных кубика и рассматривают события: A — на одном кубике выпало 2 очка; B — на другом кубике выпало число очков, не меньшее 5. Установить, в чём состоит событие $A + B$; событие AB.

5. $\boxed{5}$ Определить событие, являющееся противоположным событию:

   1) из колоды карт вынут валет красной масти;

   2) в результате броска игрального кубика выпало число очков, меньшее 5;

   3) хотя бы при одном из двух выстрелов мишень была поражена.

6. $\boxed{5}$ Пусть события C и D — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие:

   1) противоположное событию C;

   2) состоящее в том, что произошли оба события;

   3) состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий.

7. $\boxed{7}$ Пусть C и D — произвольные события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие, состоящее в том, что произошло только событие C, и проиллюстрировать это событие с помощью кругов Эйлера.

§ 67. Вероятность события

Справочные сведения

Вероятностью $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех элементарных исходов испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leqslant n.$$

Если V — невозможное событие, U — достоверное событие, то $P(V) = 0$, $P(U) = 1$.

Примеры с решениями

1. На стол бросают игральные кубик и тетраэдр. Найти вероятность того, что на кубике выпадет чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка (на тетраэдре считывают очки с грани, касающейся поверхности стола).

Решение. Пусть событие A — на кубике выпало чётное число очков, а на тетраэдре — 4 очка.

Общее число возможных исходов испытания находим с помощью правила произведения: $n = 6 \cdot 4 = 24$ (каждая из 6 граней кубика может выпасть одновременно с любой из 4 граней тетраэдра). Благоприятствующими событию A исходами будут комбинации чётных чисел на кубике (их три) с числом 4 на тетраэдре, т. е. $m = 3$.

Таким образом, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Ответ. $\frac{1}{8}$.

2. В ящике лежат 4 белых и 5 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.

Решение. Пусть событие A — все три вынутых шара белые. Общее число возможных исходов испытания (троек шаров, выбранных из девяти имеющихся) равно $n = C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = 84$. Благоприятствующими событию A исходами будут тройки шаров, выбранных из имеющихся четырёх белых шаров, т. е. $m = C_4^3 = \frac{4!}{1!3!} = 4$. Таким образом, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.

Ответ. $\frac{1}{21}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{4}$ Найти вероятность того, что левая страница наугад раскрытой книги (объёмом 368 страниц) будет иметь:

1) чётный номер; 2) нечётный номер; 3) номер, кратный числу 100; 4) однозначный номер.

2. $\boxed{5}$ Какова вероятность того, что изъятая наугад из колоды в 36 листов карта окажется:

1) или дамой треф, или королём красной масти;

2) или валетом любой масти, или королём пик?

3. $\boxed{5}$ В коробке находятся 5 белых, 7 чёрных и 3 красных шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) или белый, или красный;

2) не белый;

3) не белый и не чёрный.

4. $\boxed{6}$ Найти вероятность того, что правая страница наугад раскрытой книги (объёмом 368 страниц) будет иметь:

1) однозначный номер, кратный 3;

2) двузначный номер, кратный 11;

3) номер, кратный 25; 4) двузначный номер.

5. $\boxed{6}$ Брошены два игральных кубика — белый и жёлтый. Найти вероятность того, что:

1) на обоих кубиках выпало число 2;

2) произведение выпавших чисел равно 8;

3) на белом кубике выпало число, большее 4, а на жёлтом — меньшее 4;

4) на кубиках выпали одинаковые числа, не меньшие 4.

6. $\boxed{7}$ В ящике лежат 18 гаек, среди которых 4 медные, а остальные — стальные. Наугад берут две гайки. Какова вероятность того, что вынуты:

1) две медные гайки; 2) две стальные гайки;

3) одна гайка стальная, а другая — медная?

Вариант II

1. $\boxed{4}$ Найти вероятность того, что левая страница наугад раскрытой книги (объёмом 288 страниц) будет иметь:

1) нечётный номер; 2) чётный номер;

3) номер, кратный 50; 4) однозначный номер.

2. $\boxed{5}$ Какова вероятность того, что изъятая наугад из колоды в 36 листов карта окажется:

1) или дамой червей, или валетом чёрной масти;

2) или шестёркой треф, или дамой любой масти?

3. $\boxed{5}$ В коробке находятся 6 чёрных, 8 красных и 4 белых шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) или чёрный, или белый;

2) не чёрный; 3) не красный и не белый.

4. $\boxed{6}$ Найти вероятность того, что левая страница наугад раскрытой книги (объёмом 288 страниц) будет иметь:

1) однозначный номер, кратный 4;

2) двузначный номер, кратный 13;

3) номер, кратный 75; 4) трёхзначный номер.

5. $\boxed{6}$ Брошены два игральных кубика — белый и красный. Найти вероятность того, что:

1) на белом кубике выпало число 3, а на красном — число 6;

2) сумма выпавших чисел равна 4;

3) на белом кубике выпало число, не меньшее 5, а на красном — меньшее 3;

4) на обоих кубиках выпали одинаковые числа, не большие 3.

6. $\boxed{7}$ В вазе стоят 16 астр, среди которых 5 красных, а остальные — белые. Наугад вынимают две астры. Какова вероятность того, что вынуты:

1) две белые астры; 2) две красные астры;

3) одна белая и одна красная астры?

§ 68. Сложение вероятностей

Справочные сведения

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Иногда при решении задач проще найти сначала $P(\bar{A})$, а затем $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Примеры с решениями

1. Из полного набора домино наугад извлекается одна костяшка. Какова вероятность того, что эта костяшка либо дубль, либо «один — шесть»?

Решение. Пусть событие A — появление дубля, а событие B — появление костяшки «один — шесть». В полном наборе домино (28 костяшек) семь дублей, поэтому $P(A)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$. Костяшка «один — шесть» в наборе единственная, поэтому $P(B)=\frac{1}{28}$. События A и B — несовместные, поэтому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}.$$

Ответ. $\frac{2}{7}$.

2. Спортсмен покупает для игры в настольный теннис 4 ракетки. Продавец, не выбирая, берёт с полки 4 ракетки. Найти вероятность того, что среди купленных ракеток будет хотя бы одна с красным покрытием, если на полке лежали 10 ракеток с красным и 6 ракеток с зелёным покрытием.

Решение. Пусть событие A — среди купленных ракеток есть хотя бы одна с красным покрытием, тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ — среди купленных ракеток нет ни одной с красным покрытием (т. е. все они с зелёным покрытием). Найдём предварительно вероятность события $\bar{A}$.

Число способов, которыми из 16 имеющихся на полке ракеток $(10+6=16)$ можно выбрать 4 ракетки, равно C_{16}^4, т. е. $n=C_{16}^4$. Благоприятствующими событию $\bar{A}$ будут все четвёрки ракеток, выбранных из ракеток с зелёным покрытием. Их число $m=C_6^4$. Таким образом,

$$P(\bar{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_6^4}{C_{16}^4}=\frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{16!}{4!12!}}=\frac{6!12!}{2!16!}=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{13\cdot14\cdot15\cdot16}=\frac{3}{364}.$$

Тогда $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{3}{364}=\frac{361}{364}$.

Ответ. $\frac{361}{364}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ Вероятность попадания стрелком по мишени при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что, выстрелив по мишени, стрелок промахнётся.

2. $\boxed{4}$ Вероятность выигрыша по одному билету в некоторой лотерее равна $4 \cdot 10^{-6}$. Какова вероятность того, что один приобретённый билет этой лотереи окажется невыигрышным?

3. $\boxed{4}$ Найти вероятность того, что в результате одного бросания игральной кости появится число, отличное от 3.

4. $\boxed{5}$ В ящике находятся 7 белых, 13 чёрных и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар:
1) либо белый, либо красный; 2) не красный.
Решить задачу двумя способами.

5. $\boxed{6}$ В ящике лежат 4 красных и 6 белых шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один:
1) красный шар; 2) белый шар.

6. $\boxed{7}$ В сетке лежат 5 красных, 8 зелёных и 7 жёлтых мячей. Наугад вынимают два мяча. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один зелёный мяч.

7. $\boxed{8}$ Из полной колоды карт (36 листов) извлекают наугад три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна карта трефовой масти.

Вариант II

1. $\boxed{3}$ Самонаводящаяся зенитная установка поражает цель при одном выстреле с вероятностью 0,68. Найти вероятность того, что цель не будет поражена в результате одного выстрела этой установки.

2. $\boxed{4}$ Вероятность выигрыша квадроцикла при покупке одного билета спортивной лотереи равна $6 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятность того, что по одному купленному билету этой лотереи квадроцикл не будет выигран.

3. $\boxed{4}$ Найти вероятность того, что в результате одного броска игральной кости появится число, отличное от 1.

4. $\boxed{5}$ В ящике находятся 8 чёрных, 15 белых и 7 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) либо чёрный, либо красный; 2) не чёрный.

5. $\boxed{6}$ В ящике лежат 6 белых и 8 чёрных шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один:

1) белый шар; 2) чёрный шар.

6. $\boxed{7}$ В коробке лежат 6 белых, 7 красных и 9 чёрных кубиков. Наугад вынимают 2 кубика. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один белый кубик.

7. $\boxed{8}$ Из полной колоды карт (36 листов) извлекают наугад 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна карта бубновой масти.

§ 69. Независимые события. Умножение вероятностей

Справочный материал

События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Независимые события появляются в независимых испытаниях. Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы (1).

Примеры с решениями

1. Установить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{4}{5}$, $P(AB) = \frac{1}{10}$;

2) $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}4$, $P(AB) = 0{,}01$.

Решение. 1) Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{10} = P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A) \cdot P(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1 \neq 0{,}01 = P(AB)$, то события A и B не являются независимыми.

2. Вероятность попадания первым стрелком в цель при одном выстреле равна 0,7, а вероятность попадания в цель вторым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Оба стрелка делают по одному выстрелу в цель. Найти вероятность поражения цели обоими стрелками.

Решение. Событие A (попадание первым стрелком в цель при одном выстреле) и событие B (попадание вторым стрелком в цель при одном выстреле) происходят в независимых испытаниях, поэтому события A и B независимые. Вероятность наступления и события A, и события B равна $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Ответ. 0,56.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ Установить, являются ли события A и B независимыми, если:

   1) $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{2}{15}$, $P(AB) = 0{,}4$;

   2) $P(A) = 0{,}15$, $P(B) = 0{,}6$, $P(AB) = 0{,}09$.

2. $\boxed{4}$ Бросают два игральных кубика — жёлтый и зелёный. Рассматривают события: A — на жёлтом кубике выпало 2 очка, B — на зелёном кубике выпало число очков, кратное 3. С помощью формулы (1) показать, что события A и B являются независимыми.

3. $\boxed{5}$ На карточках записаны первые двадцать натуральных чисел (по одному числу на карточке). Случайным образом выбирают одну из карточек и рассматривают события:

   1) A — на карточке записано чётное число, B — на карточке записано число, кратное 6;

   2) A — на карточке записано нечётное число, B — на карточке записано число, кратное 5.

   Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

4. $\boxed{6}$ Вероятность того, что баскетболист при одном броске попадёт в корзину, равна 0,75. Этот баскетболист бросает в корзину мяч дважды. Найти вероятность того, что он попадёт в корзину:

   1) оба раза; 2) хотя бы один раз.

5. $\boxed{7}$ В первом ящике находятся 6 красных и 8 чёрных шаров, а во втором — 8 красных и 3 чёрных. Наугад из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что:

1) оба вынутых шара красные;
2) оба вынутых шара чёрные;
3) хотя бы один шар красный;
4) хотя бы один шар чёрный.

6. $\boxed{8}$ Вероятность попадания в цель первым стрелком при одном выстреле равна 0,75, вторым — 0,8, третьим — 0,9. Все стрелки сделали по одному выстрелу в цель. Найти вероятность того, что:
1) все стрелки попали в цель;
2) все стрелки промахнулись;
3) хотя бы один попал в цель;
4) хотя бы один промахнулся.

Вариант II

1. $\boxed{3}$ Установить, являются ли события C и D независимыми, если:
1) $P(C) = \frac{5}{12}$, $P(D) = \frac{3}{5}$, $P(CD) = 0{,}25$;
2) $P(C) = 0{,}8$, $P(D) = 0{,}12$, $P(CD) = 0{,}96$.

2. $\boxed{4}$ Бросают два игральных кубика: белый и красный. Рассматривают события: A — на белом кубике выпало нечётное число очков, B — на красном кубике выпало число очков, большее 4. С помощью формулы (1) показать, что события A и B являются независимыми.

3. $\boxed{5}$ Наугад называют одно из первых восемнадцати натуральных чисел и рассматривают события:
1) B — названо число, кратное 3, C — названо число, не меньшее 15;
2) B — названо нечётное число, C — названо число, кратное 7.
Выяснить, являются ли события B и C независимыми.

4. $\boxed{6}$ Вероятность того, что вынута бракованная деталь из партии деталей, равна 0,01. Наугад вынимают одну деталь. Затем, вернув её обратно, наугад вынимают ещё одну деталь. Найти вероятность того, что:
1) оба раза были вынуты бракованные детали;
2) хотя бы один раз была вынута бракованная деталь.

5. $\boxed{7}$ В одной сетке лежат 7 белых и 10 красных мячей, а в другой — 5 белых и 8 красных. Наугад из каждой сетки вынимают по одному мячу. Найти вероятность того, что:

1) оба вынутых мяча белые;
2) оба вынутых мяча красные;
3) хотя бы один мяч белый;
4) хотя бы один мяч красный.

6. $\boxed{8}$ Три баскетболиста по очереди по одному разу бросают мяч в корзину. Вероятность попадания в корзину при одном броске у каждого баскетболиста равна 0,6; 0,9 и 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что:
1) все баскетболисты попали в корзину;
2) все баскетболисты промахнулись;
3) хотя бы один попал в корзину;
4) хотя бы один промахнулся.

§ 70. Статистическая вероятность

Справочные сведения

Относительной частотой события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют *частотой* события A.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому

$$W(A) = \frac{M}{N}.$$

Статистической вероятностью $P(A)$ события A называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний.

Пример с решением

По данным районной поликлиники в январе текущего года среди 150 жильцов некоторого многоквартирного дома 42 жильца переболели гриппом. Найти относительную частоту (выраженную в процентах) заболеваемости гриппом жильцов рассматриваемого дома в январе текущего года.

Решение. Событие A — заболеваемость гриппом жильцов дома в январе (произошло в 42 случаях, т. е. $M = 42$). Так как общее число жильцов $N = 150$, то $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{42}{150} = \frac{7}{25} = 28\%$.

Ответ. 28%.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{4}$ В социологическом опросе участвовало 138 мужчин и 207 женщин. Найти относительную частоту появления женщин среди всех участников опроса. Результат выразить в процентах.

2. $\boxed{5}$ Проводились испытания с подбрасыванием стальной детали, имеющей форму усечённого конуса, и результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	20	50	100	300
Частота падения детали на большой круг (M)	3	7	16	44
Относительная частота падения детали на большой круг (W)				

Заполнить последнюю строку таблицы, округляя (при необходимости) результат до сотых. Высказать предположение о приближённом значении (с точностью до сотых) вероятности события A — падение детали на большой круг.

Вариант II

1. $\boxed{4}$ В некоторой школе 52 ребёнка страдают избыточным весом. Найти относительную частоту таких детей среди всех учащихся школы, если остальные 208 детей имеют нормальный вес.

2. $\boxed{5}$ Проводились испытания с подбрасыванием стальной детали и результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	25	70	200	400
Частота падения детали на малый круг (M)	1	4	9	19
Относительная частота падения детали на малый круг (W)				

Заполнить последнюю строку таблицы, округляя (при необходимости) результат до сотых. Высказать предположение о приближённом значении (с точностью до сотых) вероятности события B — падение детали на малый круг.

Контрольная работа № 6

Вариант I

1. В ящике находятся 4 белых и 8 чёрных шаров. Наугад вынимают один из них. Найти вероятность того, что вынут чёрный шар.

2. Вероятность выигрыша по одному билету художественной лотереи равна $8 \cdot 10^{-5}$. Найти вероятность того, что один приобретённый билет этой лотереи окажется без выигрыша.

3. В серии испытаний с подбрасыванием гнутой монеты оказалось, что 9 раз выпадала *решка* и 12 раз — *орёл*. Найти относительную частоту появления *орла* в данной серии испытаний.

4. Брошены два игральных кубика — красный и зелёный. Найти вероятность того, что на красном выпало число 5, а на зелёном — нечётное число.

---

5. Наугад называется одно из первых восьми натуральных чисел. Рассматриваются события: A — назван делитель числа 8, B — названо число, кратное числу 4. Установить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

6. В коробке находятся 6 синих и 5 зелёных мячей. Наугад вынимают 3 мяча. Найти вероятность события:
   1) все вынутые мячи зелёные;
   2) хотя бы один мяч зелёный.

Вариант II

1. В ящике находятся 6 чёрных и 9 красных шаров. Наугад вынимают один из них. Найти вероятность того, что вынут красный шар.

2. Вероятность купить бракованный сотовый телефон некоторой модели равна $7 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятность покупки небракованного телефона этой модели (при покупке одного аппарата).

3. В серии испытаний с подбрасыванием кнопки она упала на остриё 42 раза и плашмя 66 раз. Найти относительную частоту падения кнопки плашмя в данной серии испытаний.

4. **Брошены два игральных кубика — белый и чёрный. Найти вероятность того, что на белом кубике выпало число, кратное 3, а на чёрном — число 6.**

5. **Наугад называют одно из первых девяти натуральных чисел. Рассматриваются события: A — названо число, кратное числу 3, B — назван делитель числа 6. Установить, в чём состоят события $A + B$ и AB.**

6. **В коробке находятся 4 жёлтых и 6 красных мячей. Наугад вынимают 3 мяча. Найти вероятность события:**

   1) все вынутые мячи жёлтые;

   2) хотя бы один мяч красный.

§ 71. Случайные величины

Справочные сведения

Случайными величинами называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний могут принимать различные значения.

Распределение значений случайной величины (X, Y и т. п.) может быть представлено в виде *таблицы распределения по вероятностям* P (табл. 1), *по частотам* M (табл. 2) или *по относительным частотам* W (табл. 3).

Таблица 1

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\Sigma P = 1$

Таблица 2

Y	1	2	5	10
M	5	7	9	6

$\Sigma M = N$

Таблица 3

Z	1	2	3	4	5	6
W	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

$\Sigma W = 1$

Для наглядности распределение значений случайной величины иногда представляют в виде *диаграмм, полигонов частот, гистограмм.*

Полигон частот (относительных частот) — это ломаная линия, построенная в прямоугольной системе координат, по оси абсцисс которой отложены значения случайной величины, а по оси ординат — значения частот (относительных частот), которые имеет случайная величина в выборке. Концы отрезков ломаной — это точки с абсциссой, равной значению случайной величины, и ординатой, равной значению частоты (относительной частоты) этой величины в выборке.

Пример с решением

Составить таблицу распределения по частотам M и по относительным частотам W значений случайной величины X — размеров одежды 20 десятиклассников: 48, 52, 48, 46, 50, 46, 50, 44, 46, 50, 48, 48, 46, 54, 48, 46, 44, 50, 48, 48.

Решение. В первой строке таблицы запишем по одному разу в порядке возрастания все встречающиеся в выборке значения величины X. Во второй строке запишем соответствующие каждому значению X подсчитанные частоты M.

X	44	46	48	50	52	54	
M	2	5	7	4	1	1	$\Sigma M = 20$
W	0,1	0,25	0,35	0,2	0,05	0,05	$\Sigma W = 1$

Делаем проверку: сумма значений M должна быть равна $N = 20$. Для каждого значения X находим соответствующее значение относительной частоты $W = \frac{M}{N}$ (в нашем случае $W = \frac{M}{20}$). Делаем проверку: сумма значений W в последней строке должна быть равна 1.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{4}$ По данным частотной таблицы распределения значений случайной величины X построить полигон частот и таблицу распределения её значений по относительным частотам:

1)

X	4	5	6
M	2	6	4

2)

X	−1	3	4	7
M	4	7	6	3

2. $\boxed{5}$ Составить таблицы распределения по частотам M и относительным частотам W значений случайной величины X — размеров головных уборов нескольких девушек:

55, 54, 56, 55, 57, 56, 58, 57, 57, 56.

3. $\boxed{6}$ С помощью полигона относительных частот проиллюстрировать распределение значений случайной величины Y — цифр, встречающихся в номерах телефонов нескольких одноклассников:

62138, 62571, 62963, 61341, 62563, 61405,
62702, 61570, 62849, 62683.

4. $\boxed{7}$ Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины Z — произведения чисел, появившихся в результате бросания двух игральных кубиков.

Вариант II

1. $\boxed{4}$ По данным частотной таблицы распределения значений случайной величины X построить полигон частот и таблицу распределения её значений по относительным частотам:

1)

X	2	3	4
M	1	6	3

2)

X	–1	0	2	4	5
M	2	6	9	5	3

2. $\boxed{5}$ Составить таблицы распределения по частотам M и относительным частотам W значений случайной величины Y — размеров одежды нескольких юношей:

50, 48, 48, 46, 50, 52, 44, 46, 50, 48, 46, 44.

3. $\boxed{6}$ С помощью полигона относительных частот проиллюстрировать распределение значений случайной величины X — цифр, встречающихся в ценниках на телевизоры в некотором магазине:

11099, 6799, 15349, 102999, 100049, 18099,
7299, 13450, 10999, 32999.

4. $\boxed{7}$ Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — произведения чисел, появившихся в результате бросания игрального кубика и игрального тетраэдра.

§ 72. Центральные тенденции

Справочные сведения

Мода (обозначают Mo) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке. Если наибольшую частоту имеют k значений случайной величины, то выборка имеет k мод.

Медиана (обозначают Me) — это серединное значение упорядоченной выборки.

Среднее (или *среднее арифметическое*) — это число, равное отношению суммы всех членов выборки к их количеству. Если рассматривается выборка значений случайной величины X, то её среднее обозначают $\bar{X}$.

Математическое ожидание (обозначают E) случайной величины X находится по формуле

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + \dots + X_{n-1}P_{n-1} + X_nP_n,$$

где X_i — значение случайной величины, а P_i — вероятность, с которой появляется соответствующее значение величины X_i (i — натуральное число, $1 \leqslant i \leqslant n$).

Примеры с решениями

1. Найти моду выборки значений случайной величины:

1) 5, 7, 3, 5, 4; 2) 0, 4, 2, 2, 3, 1, 4.

Решение.

1) Число 5 встречается в выборке дважды, а остальные значения — по одному разу, значит, мода выборки равна 5.

2) Наибольшую частоту, равную 2, имеют два значения случайной величины: 2 и 4. Они и являются модами.

Ответ. 1) $Mo = 5$; 2) $Mo_1 = 2$, $Mo_2 = 4$.

2. Найти медиану выборки:

1) 6, 5, 7, 5, 3, 9, 8; 2) 2, 1, 3, 4, 1, 5.

Решение.

1) Упорядочим выборку (разместим её данные в порядке, например, возрастания):

$$3,\ 5,\ 5,\ \underline{6},\ 7,\ 8,\ 9.$$

В выборке — нечётное число данных, поэтому медианой является её серединный (четвёртый) член 6.

2) После упорядочения выборки с чётным числом членов:

$$1, 1, \underbrace{2, 3}, 4, 5$$

находим среднее арифметическое двух её серединных значений: $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

Ответ. 1) $Me = 6$; 2) $Me = 2{,}5$.

3. Найти среднее арифметическое выборки значений случайной величины Y:

1) 4, −2, 0, 4, 3, −2, 4, 1;

2)

Y	−1	0	2	3
M	2	3	3	4

Решение.

1) $\bar{Y} = \frac{4+(-2)+0+4+3+(-2)+4+1}{8} = \frac{12}{8} = 1,5;$

2) $\bar{Y} = \frac{-1\cdot 2+0\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot 4}{12} = \frac{16}{12} = 1\frac{1}{3}.$

Ответ. 1) $\bar{Y} = 1,5$; 2) $\bar{Y} = 1\frac{1}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{4}$ Найти моду выборки:
   1) 10, 12, 15, 11, 12, 13, 12, 15;
   2) 3, 2, 2, 1, 4, 5, 3, 6, 4.

2. $\boxed{4}$ Найти медиану выборки:
   1) 5, 8, 7, 6, 2, 4, 0, 3, 5;
   2) 9, 3, 10, 3, 9, 5, 10, 4, 8, 11.

3. $\boxed{4}$ Найти среднее выборки:
   1) −6, 18, −12, 0, 10;
   2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{5}$, 0, 0.

4. $\boxed{5}$ Найти моду, медиану и среднее выборки:
   1) 3, −1, 0, 2, 0; 2) 4, 2, 0, 3, 4, 3.

5. $\boxed{5}$ Найти среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице:

1)

X	−2	0	3
M	2	3	3

2)

X	−3	−1	1	3	5
M	2	4	3	2	1

6. $\boxed{6}$ Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины Y:

1)

Y	-1	0	1
M	2	3	5

2)

Y	-2	0	1	3
M	1	3	3	2

7. $\boxed{7}$ **Найти математическое ожидание случайной величины X:**

1)

X	0	1	2
P	0,1	0,6	0,3

2)

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

Вариант II

1. $\boxed{4}$ **Найти моду выборки:**

1) 7, 6, 5, 6, 3, 2, 5, 6, 1;

2) 15, 12, 15, 13, 12, 13, 15, 13.

2. $\boxed{4}$ **Найти медиану выборки:**

1) -1, 3, 0, 2, 4, 3, 2;

2) 13, 15, 12, 10, 12, 14, 13, 15, 16, 15.

3. $\boxed{4}$ **Найти среднее выборки:**

1) 2, 0, -3, 4;

2) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}$.

4. $\boxed{5}$ **Найти моду, медиану и среднее выборки:**

1) 5, 2, 5, 3, 3, 4; 2) -3, 0, 4, 0, 2.

5. $\boxed{5}$ **Найти среднее выборки значений случайной величины Y, распределение которых по частотам представлено в таблице:**

1)

Y	-1	1	3	4
M	1	2	4	3

2)

Y	-1	0	2	3	5
M	6	7	6	2	1

6. $\boxed{6}$ **Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X:**

1)

X	-4	0	3	4
M	2	2	5	3

2)

X	-2	-1	0
M	3	2	1

7. $\boxed{7}$ Найти математическое ожидание случайной величины X:

1)

X	2	3	4
P	$\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$

2)

X	−2	0	2	4
P	0,1	0,3	0,4	0,2

§ 73. Меры разброса

Справочные сведения

Размах (обозначают R) — это разность наибольшего и наименьшего значений случайной величины в выборке.

Отклонение от среднего — это разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним выборки.

Дисперсия (обозначают D) — это среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего всех значений случайной величины (взятых столько раз, сколько они встречаются в выборке).

Для случайной величины X, принимающей N различных значений, справедлива формула

$$D = \frac{(X_1-\bar{X})^2 + (X_2-\bar{X})^2 + \ldots + (X_N-\bar{X})^2}{N}. \qquad (1)$$

Если значения X_1, X_2, ..., X_K случайной величины X появляются с частотами M_1, M_2, ..., M_K соответственно, то дисперсию можно найти по формуле

$$D = \frac{(X_1-\bar{X})^2 M_1 + (X_2-\bar{X})^2 M_2 + \ldots + (X_K-\bar{X})^2 M_K}{M_1 + M_2 + \ldots + M_K}, \qquad (2)$$

где $\bar{X} = \dfrac{X_1M_1 + X_2M_2 + \ldots + X_KM_K}{M_1 + M_2 + \ldots + M_K}$.

Среднее квадратичное отклонение (обозначают σ) находят по формуле $\sigma = \sqrt{D}$.

Примеры с решениями

1. Найти размах и дисперсию выборки значений случайной величины X: 12 м, 10 м, 13 м, 11 м.

Решение. $R = 13 - 10 = 3$ (м).

$\bar{X} = \dfrac{12+10+13+11}{4} = 11{,}5$ (м).

Дисперсию найдём по формуле (1):

$$D = \frac{(12-11{,}5)^2 + (10-11{,}5)^2 + (13-11{,}5)^2 + (11-11{,}5)^2}{4} =$$

$$= \frac{0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ответ. $R = 3$ м, $D = 1{,}25$ м^2.

2. Найти с точностью до 0,1 среднее квадратичное отклонение величины X, заданной распределением по частотам:

X	-1	0	2
M	2	3	7

Решение. Найдём среднее выборки:

$$\bar{X} = \frac{-1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 2\cdot 7}{2+3+7} = 1.$$

Заполним таблицу и найдём D по формуле (2).

X	-1	0	2
M	2	3	7
$X-\bar{X}$	-2	-1	1
$(X-\bar{X})^2$	4	1	1
$(X-\bar{X})^2\cdot M$	8	3	7

$$D = \frac{(X_1-\bar{X})^2 M_1 + (X_2-\bar{X})^2 M_2 + (X_3-\bar{X})^2 M_3}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{8+3+7}{2+3+7} = \frac{18}{12} = 1{,}5.$$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}2$.

Ответ. $\sigma \approx 1{,}2$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ Найти размах выборки:
   1) $-100,\ 98,\ 72,\ -34,\ 49$;
   2) $\frac{2}{7},\ -\frac{3}{8},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}$.

2. $\boxed{5}$ Найти дисперсию выборки:
   1) 15 м, 12 м, 18 м;
   2) 5 ч, 7 ч, 4 ч, 4 ч.

3. $\boxed{6}$ Найти среднее квадратичное отклонение от среднего элементов выборки:

   9 т, 15 т, 11 т, 12 т, 13 т.

4. $\boxed{7}$ Найти (с точностью до 0,1) среднее квадратичное отклонение от среднего значений случайной величины X:

X	-3	-1	0	4
M	1	2	3	4

5. $\boxed{7}$ Даны две выборки: 6, 5, 7, 2 и 9, 7, 10, 12, 8. Определить, какая из них имеет меньшую меру рассеивания своих данных около среднего.

Вариант II

1. $\boxed{3}$ Найти размах выборки:
   1) $54,\ -27,\ 13,\ 49,\ -30$;
   2) $-\frac{1}{6},\ \frac{5}{9},\ \frac{6}{11},\ -\frac{1}{7}$.

2. $\boxed{5}$ Найти дисперсию выборки:
   1) 16 с, 10 с, 13 с;
   2) 6 кг, 11 кг, 8 кг, 7 кг.

3. $\boxed{6}$ Найти (с точностью до 0,1) среднее квадратичное отклонение от среднего элементов выборки:

   21 м, 15 м, 18 м, 14 м.

4. $\boxed{7}$ **Найти (с точностью до 0,1) среднее квадратичное отклонение от среднего значений случайной величины** X**:**

X	−2	−1	0	1	2
M	2	4	9	4	1

5. $\boxed{7}$ **Даны две выборки: 4, 3, 5, 6, 7 и 11, 9, 10, 8. Определить, какая из них имеет меньшую меру рассеивания своих данных около среднего.**

Контрольная работа № 7

Вариант I

1. Имеется набор случайно названных трёхзначных чисел:

205, 329, 456, 758, 664, 927, 730, 115.

Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины Y — цифр, встречающихся в наборе. Найти относительную частоту использования в наборе цифры 8.

2. Построить полигон частот значений случайной величины X, распределение которых представлено в таблице:

X	−2	−1	0	1	2	3	4
M	2	3	4	6	5	4	1

3. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки

−2, 0, 2, −3, −2, 5.

---

4. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины Z:

Z	−3	−1	0	2	4	5	6
M	1	3	5	5	4	1	1

5. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение от среднего элементов выборки −4, −1, 0, 2, 3.

Вариант II

1. Имеется набор случайно названных четырёхзначных чисел:

5421, 6072, 3946, 8307, 4571, 3156, 9824.

Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины Z — цифр, встречающихся в наборе. Найти относительную частоту использования в наборе цифры 3.

2. Построить полигон частот значений случайной величины X, распределение которых представлено в таблице:

X	-3	-1	-2	0	1	2	3	4
M	1	2	4	5	6	3	3	1

3. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки

$$5,\ -3,\ 2,\ -4,\ 2,\ 0.$$

---

4. Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины Y:

Y	-2	0	1	3	4	5
M	2	3	5	3	2	1

5. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение от среднего элементов выборки -2, -1, 0, 3, 5.

Главы VII—XIII

§ 38

Вариант I

1. $x \neq -3$. 2. $x \geqslant 2{,}5$. 3. $x \in \boldsymbol{R}$. 4. $x < -\sqrt{2}, x > \sqrt{2}$. 5. $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = \frac{1}{2}x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$. 6. $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = (x-1)^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$. 7. $y = \sqrt{x}$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $y = \sqrt{x} - 1$: $x \geqslant 0, y \geqslant -1$. 8. $x \in [-2;\ 3], y \in [-2;\ 1]$. 9. $x \in [-3;\ 2], y \in [-3;\ 2]$. 10. $y \in [0;\ 18]$. 11. $y \in \left[\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right]$. 12. $x \neq 0$, $y \neq 0$. 13. $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 1$. 14. $x \geqslant 2, y \geqslant 0$. 15. $x \in \boldsymbol{R}$. 16. $x \in \boldsymbol{R}$. 17. $x \neq 0$. 18. $x \in \boldsymbol{R}$. 19. $x \geqslant 1$. 20. $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 21. $x \neq 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 22. $x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 23. $x \neq \pi\,(2n+1), n \in \boldsymbol{Z}$. 24. $x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. 25. $x \neq -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 26. $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 27. $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 28. $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 29. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 30. $[-1;\ 1]$. 31. $[-1;\ 1]$. 32. $[0;\ 2]$. 33. $[-1;\ 3]$. 34. $[0;\ 2]$. 35. $[-3;\ 1]$. 36. $[-3;\ -1]$. 37. $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$. 38. $[-13;\ 13]$. 39. $\left[2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}\right]$. 40. $y = 2{,}5$, $y = -2{,}5$. 41. $y = 5$, $y = 1$. 42. $y = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$. 43. $y = 4{,}5$, $y = 9{,}5$. 44. $y = 0{,}5$, $y = 13{,}5$.

Вариант II

1. $x \neq 2$. 2. $x \leqslant 2\frac{1}{3}$. 3. $x \in \boldsymbol{R}$. 4. $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. 5. $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = 2x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$. 6. $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = x^2 - 1$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant -1$. 7. $y = \sqrt{x}$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $y = \sqrt{x-1}$: $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$. 8. $x \in [-2;\ 3]$, $y \in [-2;\ 2]$. 9. $x \in [-1;\ 2]$, $y \in [1;\ 3]$.

10. $y \in \left[0; 1\frac{1}{3}\right]$. 11. $y \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$. 12. $x \neq 0$, $y \neq 0$. 13. $x \in \boldsymbol{R}$, $y \leqslant 3$. 14. $x \geqslant -2$, $y \geqslant 0$. 15. $x \in \boldsymbol{R}$. 16. $x \in \boldsymbol{R}$. 17. $x \neq 0$. 18. $x \in \boldsymbol{R}$. 19. $x \leqslant 1$. 20. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 21. $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 22. $x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 23. $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 24. $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 25. $x \neq \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 26. $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 27. $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 28. $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 29. $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 30. $[-1; 1]$. 31. $[-1; 1]$. 32. $[-2; 0]$. 33. $[-4; 2]$. 34. $[-1; 1]$. 35. $[-1; 3]$. 36. $[1; 5]$. 37. $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. 38. $[-10; 10]$. 39. $[0; 10]$. 40. $y = 1{,}5$, $y = -1{,}5$. 41. $y = 8$, $y = 2$. 42. $y = -\sqrt{5}$, $y = \sqrt{5}$. 43. $y = -1$, $y = 9$. 44. $y = 3 \pm \sqrt{5}$.

§ 39

Вариант I

1. Нечётная. **2.** Нечётная. **3.** Чётная. **4.** Нечётная. **5.** Чётная. **6.** Ни чётная, ни нечётная. **7.** Нечётная. **8.** Ни чётная, ни нечётная. **12.** Чётная. **13.** Чётная. **25.** 4. **26.** 0.

Вариант II

1. Нечётная. **2.** Нечётная. **3.** Чётная. **4.** Чётная. **5.** Нечётная. **6.** Ни чётная, ни нечётная. **7.** Нечётная. **8.** Ни чётная, ни нечётная. **12.** Нечётная. **13.** Чётная. **25.** −6. **26.** 4.

§ 40

Вариант I

1. 1) Возрастает на отрезке $[-\pi; 0]$, убывает на отрезках $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$, $[0; \pi]$; 2) $y = 0$ при $x = -\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$; 3) $y = 1$ при $x = 0$, $y = -1$ при $x = -\pi$, π; 4) $y > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $y < 0$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. **2.** 1) Возрастает на отрезках $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$,

$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, убывает на отрезках $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $y = 0$ при $x = -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; 3) $y = 1$ при $x = -\pi, 0, \pi$, $y = -1$ при $x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; 4) $y > 0$ при $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$; $y < 0$ при $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$. **3.** Нет. **4.** $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right) < \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$. **5.** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$. **6.** $\cos\pi < \cos\frac{3\pi}{10}$. **7.** $-\frac{5\pi}{6}$. **8.** $\frac{\pi}{3}$. **9.** $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$. **10.** $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$. **11.** $-\pi$; π. **12.** $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) > \cos\frac{7\pi}{4}$. **13.** $\cos\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{3\pi}{8}$. **14.** $\cos 0{,}8 > \cos 2{,}8$. **15.** $\cos(-2) < \cos(-0{,}2)$. **18.** $-3 \leqslant y \leqslant 3$. **19.** $-1 \leqslant y \leqslant 1$. **23.** 5. **24.** 7.

Вариант II

1. 1) Возрастает на отрезках $[-\pi; 0]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$, убывает на отрезках $[-2\pi; -\pi]$, $[0; \pi]$; 2) $y = 0$ при $x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; 3) $y = 1$ при $x = -2\pi, 0$; $y = -1$ при $x = -\pi, \pi$; 4) $y > 0$ при $x \in \left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $y < 0$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. 1) Возрастает на отрезке $[-2\pi; 0]$, убывает на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $y = 0$ при $x = -\pi, \pi$; 3) $y = 1$ при $x = 0$; $y = -1$ при $x = -2\pi$; 4) $y > 0$ при $x \in (-\pi; \pi)$; $y < 0$ при $x \in [-2\pi; -\pi)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Нет. **4.** $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) > \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$. **5.** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) > \cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$. **6.** $\cos\pi < \cos\frac{9\pi}{5}$. **7.** $\frac{2\pi}{3}$. **8.** $-\frac{\pi}{4}$. **9.** $\left(-2\pi; -\frac{11\pi}{6}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$. **10.** $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$. **11.** 0, 2π. **12.** $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right) > \cos\frac{3\pi}{4}$. **13.** $\cos\frac{\pi}{5} > \sin\frac{5\pi}{4}$. **14.** $\cos 6{,}5 > \cos 7{,}5$. **15.** $\cos(-3) < \cos(-2{,}5)$. **18.** $-0{,}5 \leqslant y \leqslant 0{,}5$. **19.** $-1 \leqslant y \leqslant 1$. **23.** 5. **24.** 5.

§ 41

Вариант I

1. 1) Возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=0,\ \pi,\ 2\pi$; 3) $y>0$ при $x\in(0;\ \pi)$; $y<0$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $(\pi;\ 2\pi)$; 4) $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$; $y=-1$ при $x=-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$. **2.** 1) Возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, убывает на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$; 2) $y=0$ при $x=0,\ 2\pi$; 3) $y>0$ при $x\in(0;\ 2\pi)$; $y<0$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; 4) $y=1$ при $x=\pi$; $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $x=-\frac{\pi}{2}$. **3.** Нет. **4.** $-\frac{3\pi}{4}<x<-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$. **5.** $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$. **6.** $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. **7.** $\sin\frac{\pi}{8}<\sin\frac{2\pi}{5}$. **8.** $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)>\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$. **9.** $\sin\pi>\sin\frac{7\pi}{4}$. **10.** $\sin\left(-\frac{11\pi}{10}\right)>\sin\frac{\pi}{15}$. **11.** $\sin\frac{4\pi}{9}>\cos\frac{17\pi}{11}$. **12.** $\sin 0{,}3>\sin 3{,}4$. **13.** $\sin(-2)<\sin(-5)$. **14.** $\sin(-0{,}5)<\cos(-6)$. **15.** $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin 1$, $\sin 1{,}5$. **16.** $\sin(-1{,}5)$, $\sin 3$, $\cos 0{,}1$. **17.** $-2\leqslant y\leqslant 0$. **18.** $-2\leqslant y\leqslant 4$. **29.** 7. **30.** 3.

Вариант II

1. 1) Возрастает на отрезках $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, убывает на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=-2\pi,\ -\pi,\ 0$; 3) $y>0$ при $x\in(-2\pi;\ -\pi)$; $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $y<0$ при $x\in(-\pi;\ 0)$; 4) $y=1$ при $x=-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$; $y=-1$ при $x=-\frac{\pi}{2}$. **2.** 1) Возрастает на отрезках $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{4}\right]$, $\left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, убывает на отрезках $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ \pm\frac{\pi}{2},\ 0,\ 2\pi$;

3) $y>0$ при $x\in\left(-2\pi;-\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$; 4) $y=1$ при $x=-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$; $y=-1$ при $x=-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$. **3.** Нет. **4.** $-\frac{2\pi}{3}<x<-\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$. **5.** $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$. **6.** $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. **7.** $\sin 0{,}2\pi<\sin\frac{3\pi}{11}$. **8.** $\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)>\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$. **9.** $\sin 2\pi<\sin\frac{3\pi}{4}$. **10.** $\sin\frac{\pi}{9}<\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$. **11.** $\cos\frac{5\pi}{6}<\sin\frac{13\pi}{10}$. **12.** $\sin 4<\sin 6{,}5$. **13.** $\sin(-1)<\sin(-4)$. **14.** $\cos(-0{,}7)>\sin(-0{,}8)$. **15.** $\sin 6$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\sin(-4{,}5)$. **16.** $\cos 3$, $\sin(-0{,}1)$, $\sin 1$. **17.** $0\leqslant y\leqslant 2$. **18.** $\frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 1\frac{1}{3}$. **29.** 7. **30.** 3.

§ 42

Вариант I

1. 1) Возрастает на промежутках $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; 2) $y=0$ при $x=-\pi$, 0, π, 2π; 3) $y>0$ при $x\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$. **2.** 1) Убывает на промежутках $\left[-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$, $(-\pi;0)$, $(0;\pi)$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$; 3) $y>0$ при $x\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. **3.** $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=-\frac{5\pi}{6}$. **4.** $x_1=\frac{3\pi}{4}$, $x_2=\frac{7\pi}{4}$. **5.** $\left[-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right]$, $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right]$, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$. **6.** $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right]$, $\left(0;\frac{3\pi}{4}\right]$, $\left(\pi;\frac{7\pi}{4}\right]$. **7.** $\left(\operatorname{arctg}3;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\operatorname{arctg}3+\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. **8.** $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **9.** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}>\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$. **11.** $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}>\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$. **12.** $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}>\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$.

13. $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right) > \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. 14. $\operatorname{tg} 1{,}8 < \operatorname{tg}(-2)$. 15. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{14}$. 16. $\operatorname{tg} 1{,}5$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} 1{,}8$. 17. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 18. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вариант II

1. 1) Возрастает на промежутках $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; 2) $y = 0$ при $x = -\pi$, 0, π; 3) $y > 0$ при $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $y < 0$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. 2. 1) Убывает на промежутках $(-\pi; 0)$, $(0; \pi)$, $(\pi; 2\pi)$; 2) $y = 0$ при $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; 3) $y > 0$ при $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; $y < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. 3. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$. 4. $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$. 5. $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. 6. $\left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right)$, $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$, $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$. 7. $\left(\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} 3 + \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \operatorname{arctg} 3 + 2\pi\right)$. 8. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$. 9. $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. 10. $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9} > \operatorname{tg}\frac{2\pi}{11}$. 11. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$. 12. $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{10\pi}{9}$. 13. $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{10} < \operatorname{tg}\left(-\frac{12\pi}{11}\right)$. 14. $\operatorname{tg}(-0{,}7) < \operatorname{tg} 4$. 15. $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{15}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$. 16. $\operatorname{tg} 1{,}49$, $\operatorname{tg} 4$, $\operatorname{tg} 0{,}5$, $\operatorname{tg} 3$. 17. $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 18. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 44

Вариант I

1. $f(x+h)=\lg(3x+3h-1)$. 2. $f(x+h)=\dfrac{x^2+2xh+h^2}{3}-\sin(2x+2h)$.

3. $f'(x)=4$. 4. $f'(x)=10x-3$. 5. $f'(x)=18$. 6. $f'(x)=-\dfrac{1}{3}$.

7. $f'(x)=-\sqrt{2}$. 8. $v_{\text{ср}}=24$. 9. $v(t)=\dfrac{2}{3}t$, $v(15)=10$.

Вариант II

1. $f(x+h)=e^{2x+2h+1}$. 2. $f(x+h)=\operatorname{tg}\dfrac{x+h}{2}-3x^2-6xh-3h^2$.

3. $f'(x)=5$. 4. $f'(x)=2-6x$. 5. $f'(x)=0{,}1$. 6. $f'(x)=\dfrac{2}{3}$.

7. $f'(x)=\lg 2$. 8. $v_{\text{ср}}=3$. 9. $v(t)=0{,}2t$, $v(20)=4$.

§ 45

Вариант I

1. $8x^7$. 2. $-11x^{-12}$. 3. $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. 4. $-\dfrac{4}{5}x^{-1\frac{4}{5}}$. 5. $-\dfrac{10}{x^{11}}$.

6. $\dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$. 7. $-\dfrac{3}{8x\sqrt[8]{x^3}}$. 8. $-12(1-3x)^3$. 9. $-375x^2$. 10. $-24(4x-3)^{-7}$.

11. $\dfrac{1}{4\sqrt[8]{(-5+2x)^7}}$. 12. $-\dfrac{3}{8\left(\dfrac{x}{2}-3\right)\sqrt[4]{\left(\dfrac{x}{2}-3\right)^3}}$. 13. $-\dfrac{1}{27}$. 14. $-0{,}2$.

15. $x_1=-1$, $x_2=1$. 16. $x_1=-1$, $x_2=1$. 17. $x=1{,}5$. 18. $x=-1{,}125$.
19. $x_1=-0{,}5$, $x_2=0{,}5$. 20. $x=3$.

Вариант II

1. $9x^8$. 2. $-12x^{-13}$. 3. $\dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$. 4. $-\dfrac{2}{3}x^{-1\frac{2}{3}}$. 5. $-\dfrac{18}{x^{19}}$. 6. $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

7. $-\dfrac{5}{6x\sqrt[6]{x^5}}$. 8. $-20(2-5x)^3$. 9. $-160x^4$. 10. $-28(7x-1)^{-5}$.

11. $\dfrac{6}{5\sqrt[10]{(-3+12x)^9}}$. 12. $-\dfrac{5}{18\left(\dfrac{x}{3}+2\right)\sqrt[6]{\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^5}}$. 13. $-\dfrac{1}{8}$. 14. $-\dfrac{5}{8}$.

15. $x_1=-1$, $x_2=1$. 16. $x_1=1$, $x_2=3$. 17. $x=1{,}5$. 18. $x_1=\dfrac{8}{9}$,

$x_2=\dfrac{4}{9}$. 19. Таких значений нет. 20. $x=-0{,}5$.

§ 46

Вариант I

1. $3x^2 - \frac{1}{x^2}$. 2. $-6x^{11}$. 3. $\frac{8}{\sqrt{x}} - 8x$. 4. $-\frac{5}{x^2} - \frac{4}{3x\sqrt[3]{x^2}}$.

5. $3x^2 + 14x$. 6. $\frac{17}{4}x^{\frac{13}{4}}$. 7. $\frac{11x^5 - 5x^4 + 8}{\sqrt{2x-1}}$. 8. $\left(\frac{x}{4} - 1\right)^3 \frac{5x-4}{4}$.

9. $\frac{13}{(2-3x)^2}$. 10. $\frac{12x^5 + 10x^4}{(3x+2)^2}$. 11. $\frac{4x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x-1)^2}$.

12. $\frac{3x^4 + 2x^3 + 2}{(2x+1)^2}$. 13. $\frac{5(x^4 - 16x^3 + 48x^2)}{(4-x)^3}$. 14. $\frac{x^4 + 4x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$.

15. $-4x^3 + 34x$. 16. $-9{,}5$. 17. $6\frac{2}{3}$. 18. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. 19. $x_1 = 0{,}8$, $x_2 = 4$. 20. $-2 < x < 3$, $x > 3$. 21. $0 < x < 0{,}8$, $x > 4$. 22. $-4 < x < 0$. 23. $-2 < x < 2$. 24. $-5 < x < -2$. 25. $72x - 42$. 26. $\frac{6x^2}{5\sqrt[5]{(1+x^3)^2}}$.

Вариант II

1. $2x + \frac{1}{x^2}$. 2. $-5x^{14}$. 3. $-6x^2 + \frac{6}{\sqrt{x}}$. 4. $-\frac{7}{4}x^{-\frac{5}{4}} + \frac{3}{x^2}$.

5. $4x^3 - 18x^2$. 6. $\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. 7. $\frac{27x^4 + 4x^3 - 15}{\sqrt{6x+1}}$. 8. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 \frac{4x+3}{3}$.

9. $\frac{12}{(3-2x)^2}$. 10. $\frac{4x^3 - 9x^2}{(2x-3)^2}$. 11. $\frac{3x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$.

12. $\frac{5x^6 - 4x^5 - 6}{(3x-2)^2}$. 13. $\frac{5x^3 - 60x^2}{(x-4)^3}$. 14. $\frac{1 - 4x^2 - x^4}{(x^3 - x)^2}$. 15. $-4x^3 + 26x$.

16. $-2{,}1$. 17. $10{,}5$. 18. $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. 19. $x_1 = 2$, $x_2 = 14$. 20. $-5 < x < 1$. 21. $2 < x < 14$, $x > 14$. 22. $-2 < x < 2$. 23. $x < -1$, $x > 1$. 24. $0 < x < 3$. 25. $50x + 30$. 26. $\frac{6x}{7\sqrt[7]{(x^2-8)^4}}$.

§ 47

Вариант I

1. $e^x + \cos x$. 2. $-\sin x - \frac{1}{x\ln 5}$. 3. $x^5(6\ln x + 1)$. 4. $\frac{3}{\cos^2 3x}$.

5. $-3e^{5-3x}$. 6. $2 \cdot 3^{2x+1}\ln 3$. 7. $-\frac{3}{2-3x}$. 8. $\frac{12}{(12x+5)\ln 7}$.

9. $-\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$. 10. $6\sin(-6x+7)$. 11. $6e^{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. 12. $x^7e^{1-x}(8-x)$.

13. $e^x(x^2-3x-2)$. 14. $\frac{e^{2x}(4x-5)}{\sqrt{2x-3}}$. 15. 0. 16. $2\cos 2x$.

17. $-2\sin 2x$. 18. $\sin 2x$. 19. $-2\sin 4x$. 20. -3. 21. $-e+\frac{2}{\ln 2}$.

22. 7. 23. $x_1=0,\ x_2=2$. 24. $x=-\pi+4\pi k,\ k\in Z$. 25. $x_1=-3,\ x_2=5$.
26. $x=7$. 27. $x<0,\ x>2$. 28. $x>3$. 29. Нет решений. 30. $0<x<\frac{4}{3}$.

31. $-2x\sin(x^2-3)$. 32. $-3\cos^2 x\sin x$. 33. $4\sin(8x-6)$.
34. $6x\sin^2 x^2\cdot\cos x^2$. 35. $\frac{4}{x}$. 36. $6x^2e^{2x^3}$. 37. $2x\cdot 4^{x^2}\cdot\ln 4$.

38. $\frac{1}{x}\cdot 0{,}3^{\ln x+5}\cdot\ln 0{,}3$. 39. $\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}$. 40. $\frac{1}{3x\ln 0{,}1\cdot\sqrt[3]{\log_{0,1}^2 x}}$.

Вариант II

1. $3^x\ln 3-\sin x$. 2. $\frac{1}{x}-\cos x$. 3. $x^4(5\ln x+1)$. 4. $\frac{4}{\cos^2 4x}$.

5. $-7e^{1-7x}$. 6. $3\cdot 2^{3x-1}\ln 2$. 7. $\frac{3}{4+3x}$. 8. $\frac{10}{(10x+3)\ln 4}$.

9. $-\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$. 10. $-0{,}2\sin(0{,}2x-5)$. 11. $-4e^{-2x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

12. $x^3\cdot e^{2-3x}(4-3x)$. 13. $e^{2x}(2x^2-4x-3)$. 14. $\frac{e^x(3-2x)}{\sqrt{4-2x}}$. 15. 0,

$x\neq\pi n,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. 16. $-2\cos 2x$. 17. $2\sin 2x$. 18. $-\sin 2x$.

19. $-\sin 4x$. 20. -4. 21. $3+18\ln 3$. 22. 7. 23. $x=2$.
24. $x=3\pi+6\pi k,\ k\in Z$. 25. $x_1=1,\ x_2=4$. 26. $x=8$. 27. $0<x<2$.
28. $0<x<16$. 29. Нет решений. 30. $x>2$. 31. $3x^2\cos(x^3+2)$.
32. $4\sin^3 x\cos x$. 33. $-3\sin(6x+4)$. 34. $-6x\cos^2 x^2\cdot\sin x^2$. 35. $\frac{3}{x}$.

36. $6xe^{3x^2}$. 37. $3x^2 5^{x^3}\ln 5$. 38. $\frac{1}{x}\cdot 0{,}2^{3+\ln x}\cdot\ln 0{,}2$. 39. $-\frac{\operatorname{tg} x}{\ln 5}$.

40. $\frac{1}{5x\ln\pi\sqrt[5]{\log_\pi^4 x}}$.

§ 48

Вариант I

1. $y=-x+2$. 2. $y=3x-7$. 3. 6. 4. 2. 5. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 6. $\frac{\pi}{4}$.

7. $-\frac{\pi}{4}$. 8. $\frac{\pi}{3}$. 9. $y=3x-1$. 10. $y=\frac{1}{4}x+2$. 11. $y=1$. 12. $y=3x$.

13. $y=10x-16$. 14. $y=-16x-15$. 15. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$.

16. $y=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$. 17. $y=\frac{1}{e}x$. 18. $y=3x+1$. 19. $M(2;\ 2)$.

20. $M\left(-1;3\frac{2}{3}\right)$, $N(3;\ 5)$. 21. $M(3;\ 4)$. 22. $(\pi k;\ 0)$, где $k\in \mathbf{Z}$, — координаты всех искомых точек.

Вариант II

1. $y=x+3$. 2. $y=-2x+8$. 3. 6. 4. 2. 5. $-2\sqrt{3}$. 6. $\frac{\pi}{4}$.

7. $-\frac{\pi}{4}$. 8. $\frac{\pi}{6}$. 9. $y=-4x+2$. 10. $y=\frac{1}{3}x+1$. 11. $y=\frac{1}{2}x$.

12. $y=-2x$. 13. $y=7x-4$. 14. $y=24x+27$. 15. $y=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$.

16. $y=x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$. 17. $y=x+1$. 18. $y=\frac{2}{e}x$. 19. $M(2;\ 2)$.

20. $M\left(1;-\frac{2}{3}\right)$, $N(-3;\ 6)$. 21. $M(1;\ 2)$. 22. $(\pi+2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, где $k\in \mathbf{Z}$, — координаты всех искомых точек.

§ 49

Вариант I

1. Возрастает на $\mathbf{R}$. 2. Убывает на $\mathbf{R}$. 3. Возрастает на промежутке $\left(1\frac{1}{4};+\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(-\infty;1\frac{1}{4}\right)$. 4. Возрастает на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. 5. Возрастает на промежутке $(0;\ 2)$, убывает на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(2;\ +\infty)$. 6. Возрастает на промежутках $(-\infty;\ -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2};\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$. 7. Возрастает на промежутках $(-3;\ 0)$ и $(3;\ +\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty;\ -3)$ и $(0;\ 3)$. 8. Возрастает на промежутке $(-1;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty;\ -1)$. 9. Возрастает на

промежутках $(-\infty; -4)$ и $(2; +\infty)$, убывает на промежутке $(-4; 2)$. **10.** Убывает на промежутках $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$. **11.** Убывает на промежутках $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$. **12.** Возрастает на промежутке $(2; +\infty)$. **13.** Убывает на промежутке $(-4; +\infty)$. **14.** Возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(6; +\infty)$, убывает на промежутке $(0; 6)$. **15.** Возрастает на промежутке $(1{,}8; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; 1{,}8)$. **16.** Убывает на $\boldsymbol{R}$. **17.** Возрастает на промежутках $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на промежутках $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **19.** При $a \geqslant 0$.

Вариант II

1. Возрастает на $\boldsymbol{R}$. **2.** Убывает на $\boldsymbol{R}$. **3.** Возрастает на промежутке $\left(\frac{7}{8}; +\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(-\infty; \frac{7}{8}\right)$. **4.** Возрастает на промежутке $\left(0; 1\frac{1}{3}\right)$, убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **5.** Возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(4; +\infty)$, убывает на промежутке $(0; 4)$. **6.** Возрастает на промежутках $(-\infty; -\sqrt{5})$ и $(\sqrt{5}; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$. **7.** Возрастает на промежутках $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$. **8.** Возрастает на промежутке $(-2; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; -2)$. **9.** Возрастает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на промежутке $(-1; 3)$. **10.** Убывает на промежутках $(-\infty; 4)$ и $(4; +\infty)$. **11.** Убывает на промежутках $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. **12.** Возрастает на промежутке $(5; +\infty)$. **13.** Убывает на промежутке $(-1; +\infty)$. **14.** Возрастает на промежутке $(0; 8)$, убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(8; +\infty)$. **15.** Возрастает на промежутке $(-2{,}25; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; -2{,}25)$. **16.** Возрастает на $\boldsymbol{R}$. **17.** Возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на промежутках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **19.** При $b \geqslant 0$.

§ 50

Вариант I

1. $x=-2{,}5$, $x=-1$, $x=2$, $x=4$, $x=6{,}7$ — критические точки; $x=-1$, $x=2$, $x=4$, $x=6{,}7$ — стационарные точки; $x=-2{,}5$, $x=-1$, $x=2$, $x=6{,}7$ — точки экстремума. **2.** $x=0$. **3.** $x=1$. **4.** $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_2=0$. **5.** $x_1=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** $x_1=1$, $x_2=3$. **7.** $x=0$. **8.** $x=\ln 2$. **9.** $x=\pi+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. **10.** Функция не имеет стационарных точек. **11.** $x=\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in \mathbf{Z}$. **12.** Функция не имеет точек экстремума. **13.** $x=-2$ — точка минимума. **14.** $x=-2$ — точка максимума; $x=0$ — точка минимума. **15.** $x=-\sqrt{3}$ — точка минимума; $x=\sqrt{3}$ — точка максимума. **16.** $x=-\sqrt{2}$ — точка максимума; $x=\sqrt{2}$ — точка минимума. **17.** Функция не имеет точек экстремума. **18.** $x=-\dfrac{5}{6}$ — точка минимума. **19.** 1) $x_1=-6$, $x_2=-4$, $x_3=-2$, $x_4=1$, $x_5=3$, $x_6=6$; 2) возрастает на промежутках $(-7;\ -6)$, $(-4;\ 2)$, $(1;\ 3)$, $(6;\ 8)$, убывает на промежутках $(-6;\ -4)$, $(-2;\ 1)$, $(3;\ 6)$. **20.** $x=\dfrac{1}{3}$ — точка минимума; $y\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$. **21.** $x=-\sqrt{2}$ — точка минимума; $x=\sqrt{2}$ — точка максимума; $y(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$, $y(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$. **22.** $x=3$ — точка минимума; $y(3)=-7$. **23.** $x=-2$, $x=1$ — точки минимума; $x=0$ — точка максимума; $y(-2)=-15$, $y(1)=12$, $y(0)=17$. **24.** $x=6$ — точка минимума; $y(6)=-1$. **25.** $x=\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$, — точки максимума; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$, — точки минимума; значения функции во всех точках максимума равны 1, значения функции во всех точках минимума равны -1. **26.** $x=0$ — точка минимума; $y(0)=-1$. **27.** $x=-2$ — точка максимума; $x=0$ — точка минимума; $y(-2)=\dfrac{4}{e^2}$, $y(0)=0$.

Вариант II

1. $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=4$, $x=5$, $x=7{,}5$ — критические точки; $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=4$ — стационарные точки; $x=-3$, $x=-1$, $x=4$, $x=7{,}5$ — точки экстремума. **2.** $x=0$. **3.** $x=2$. **4.** $x_1=-2$, $x_2=0$. **5.** $x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **6.** $x_1=-1$, $x_2=2$.

7. $x=0$. 8. $x=-\ln 4$. 9. $x=3\pi k$, $k\in Z$. 10. Функция не имеет стационарных точек. 11. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. 12. Функция не имеет точек экстремума. 13. $x=3$ — точка максимума. 14. $x=-4$ — точка максимума; $x=0$ — точка минимума. 15. $x=-\sqrt{2}$ — точка минимума; $x=\sqrt{2}$ — точка максимума. 16. $x=-\sqrt{6}$ — точка максимума; $x=\sqrt{6}$ — точка минимума. 17. Функция не имеет точек эстремума. 18. $x=2{,}25$ — точка минимума. 19. 1) $x_1=-4$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=3$, $x_5=5$; 2) возрастает на промежутках $(-6;\ -4)$, $(-2;\ 0)$, $(3;\ 5)$, убывает на промежутках $(-4;\ -2)$, $(0;\ 3)$, $(5;\ 6)$. 20. $x=0{,}3$ — точка максимума; $y(0{,}3)=0{,}45$. 21. $x=-\sqrt{3}$ — точка максимума; $x=\sqrt{3}$ — точка минимума; $y(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$, $y(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$. 22. $x=2$ — точка максимума; $y(2)=9$. 23. $x=-1$, $x=2$ — точки минимума; $x=0$ — точка максимума; $y(-1)=14$, $y(2)=-13$, $y(0)=19$. 24. $x=10$ — точка максимума; $y(10)=3$. 25. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$, — точки максимума, $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$, — точки минимума; значения функции во всех точках максимума равны 1, значения функции во всех точках минимума равны -1. 26. $x=0$ — точка максимума; $y(0)=1$. 27. $x=-3$ — точка минимума; $y(-3)=-\frac{27}{e^3}$.

§ 51

Вариант I

2. См. рис. 92. 3. См. рис. 93. 4. См. рис. 94. 5. См. рис. 95. 6. См. рис. 96. 7. См. рис. 97. 8. См. рис. 98. 9. См. рис. 99.

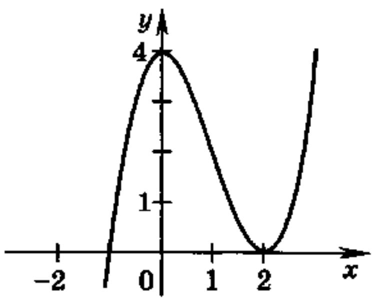


Рис. 92

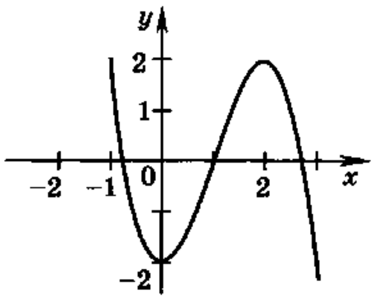


Рис. 93

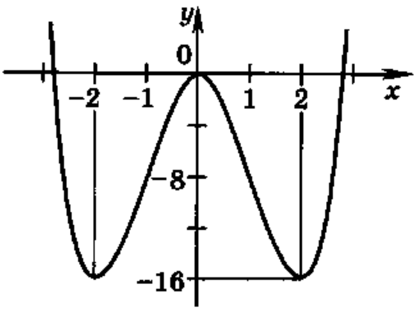


Рис. 94

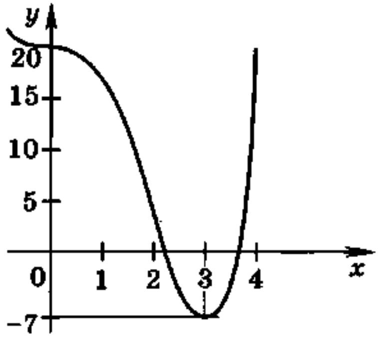


Рис. 95

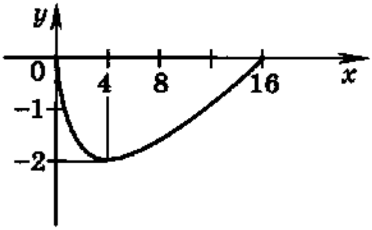


Рис. 96

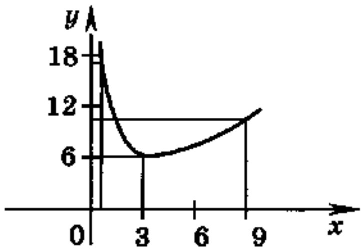


Рис. 97

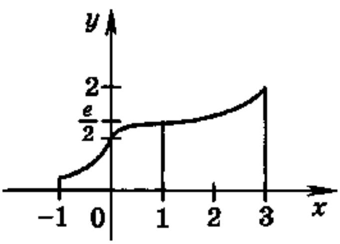


Рис. 98

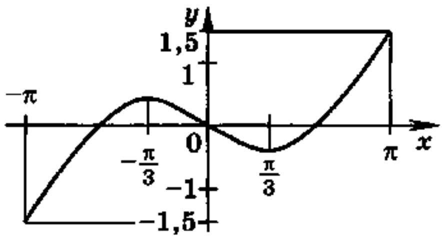


Рис. 99

Вариант II

2. См. рис. 100. **3.** См. рис. 101. **4.** См. рис. 102. **5.** См. рис. 103. **6.** См. рис. 104. **7.** См. рис. 105. **8.** См. рис. 106. **9.** См. рис. 107.

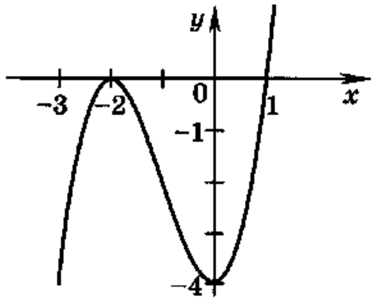


Рис. 100

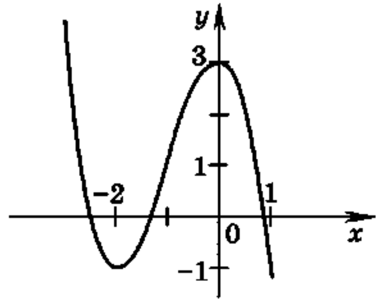


Рис. 101

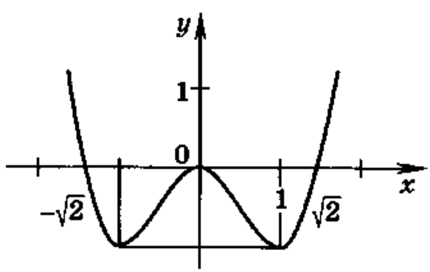


Рис. 102

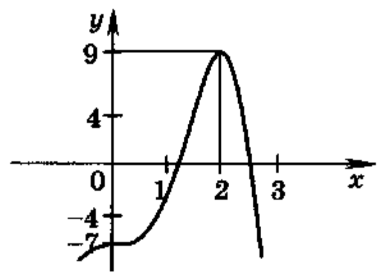


Рис. 103

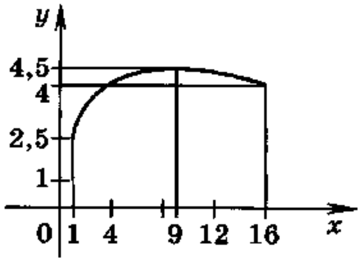


Рис. 104

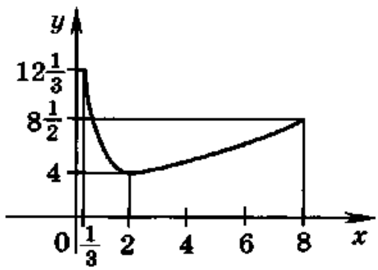


Рис. 105

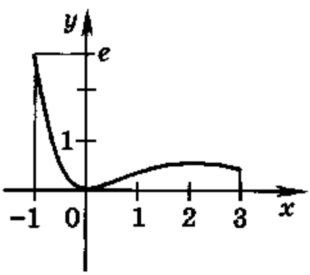


Рис. 106

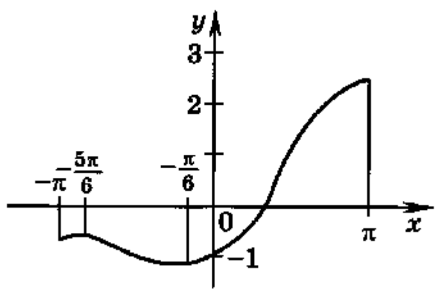


Рис. 107

§ 52

Вариант I

1. 1) 3 — наибольшее, −2 — наименьшее значение функции; 2) 7 — наибольшее, −2 — наименьшее значение функции. 2. 6 — наибольшее, −4 — наименьшее значение функции. 3. 4 — наибольшее, 2,5 — наименьшее значение функции. 4. 5 — наибольшее, 1 — наименьшее значение функции. 5. 2 — наибольшее, −2,5 — наименьшее значение функции. 6. 1 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. 7. −7 — наибольшее, −27 — наименьшее значение функции. 8. 0 — наибольшее, −27 — наименьшее значение функции. 9. 14 — наибольшее, −11 — наименьшее значение функции. 10. 10 — наибольшее, 6 — наименьшее значение функции. 11. 0 — наибольшее, −4 — наименьшее значение функции. 12. e — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. 13. −3. 14. e^2. 15. 3 дм. 16. 15 см². 17. $AM = AN = 2\sqrt{S}$. 18. $R\sqrt{\frac{2}{3}}$. 19. $4R$. 20. $\frac{H}{3}$.

Вариант II

1. 1) 0 — наибольшее, −4 — наименьшее значение функции; 2) 16 — наибольшее, −4 — наименьшее значение функции. 2. 2 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. 3. 1 — наибольшее, −8 — наименьшее значение функции. 4. 6 — наибольшее, 2 — наименьшее значение функции. 5. −1 — наибольшее, −5,5 — наименьшее значение функции. 6. 4 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. 7. −9 — наибольшее, −16 — наименьшее значение функции. 8. 11 — наибольшее, −16 — наименьшее значение функции. 9. 30 — наибольшее, −51 — наименьшее значение функции. 10. 5 — наибольшее, 4 — наименьшее значение функции. 11. 9 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. 12. $0{,}2e^2$ — наибольшее, 1 — наименьшее значение функции. 13. 6. 14. $\frac{4}{e^2}$. 15. 3 дм, 6 дм, 4 дм. 16. 7,5 см². 17. $AM = AN = \frac{a}{2}$. 18. $\frac{4R}{3}$. 19. $\frac{l\sqrt{3}}{3}$. 20. $3H$.

§ 55

Вариант I

1. $\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+C.$ 2. $\ln|x|+\frac{3}{2x^2}+C.$ 3. $\frac{x^6}{6}-x^2+C.$

4. $\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+C.$ 5. $-2\cos x+\frac{x^3}{3}+C.$ 6. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{x}+C.$

7. $4e^x-\frac{x^4}{4}+C.$ 8. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$ 9. $-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 3x+C.$

10. $-2e^{-2x}+\frac{(x-1)^4}{4}+C.$ 11. $4\sqrt{x+3}+\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{x}{2}+C.$

12. $x+\sin x+C.$ 13. $x-\ln|1+x|+C.$ 14. $\ln|x-3|-\ln|x-2|+C.$
15. $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$ 16. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C.$

17. $\ln|x+4|+\ln|x+1|+C.$ 18. $\frac{1}{2x^2}-\frac{5}{2}.$ 19. $-\sin x-\cos x+2.$

20. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|-\frac{8}{3}.$ 21. $\frac{e^{2x}}{2}+\ln|1+x|+\frac{3}{2}.$ 22. $-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{4}\sin 2x+$
$+\frac{4}{3}.$ 23. $-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}(x+1)^4+\frac{1}{2}.$ 24. $-\frac{1}{x-2}-\frac{3}{2(x-2)^2}-\frac{1}{2}.$

Вариант II

1. $\frac{2}{5}x^5-\frac{5}{2}x^2+C.$ 2. $-\frac{1}{x}+\frac{2}{3x^3}+C.$ 3. $\frac{x^7}{7}+x^3+C.$ 4. $-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+C.$

5. $3\sin x-\frac{x^2}{2}+C.$ 6. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-8\sqrt{x}+C.$ 7. $5e^x-\frac{2}{5}x^5+C.$

8. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-6\sqrt{x}+C.$ 9. $\frac{1}{18}\sin 6x+\cos 4x+C.$ 10. $3e^{2x}+\frac{1}{5}(x+1)^5+C.$

11. $6\sqrt{x-1}+\frac{x}{2}+\frac{\sin 6x}{12}+C.$ 12. $x-\sin x+C.$ 13. $x-3\ln|x+2|+C.$

14. $\frac{1}{5}\ln|x-4|-\frac{1}{5}\ln|x+1|+C.$ 15. $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x+C.$ 16. $\frac{x^3}{3}+$
$+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$ 17. $\ln|x+5|+\ln|x+1|+C.$ 18. $-\frac{2}{3x^3}-\frac{11}{12}.$

19. $\sin x-\cos x-3.$ 20. $2\sqrt{x}-2\ln|x|-5.$ 21. $2e^{\frac{x}{2}}+\ln|x+2|-$
$-4-\ln 2.$ 22. $\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{18}\cos 3x+\frac{4}{5}.$ 23. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}(x-1)^6-\frac{2}{3}.$

24. $-\frac{1}{x+3}+\frac{5}{2(x+3)^2}+\frac{7}{8}.$

§ 56

Вариант I

1. См. рис. 108. **2.** См. рис. 109. **3.** См. рис. 110.

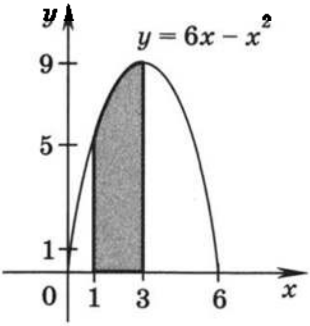


Рис. 108

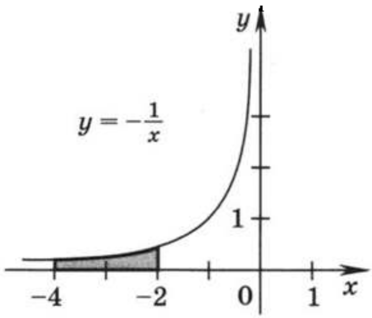


Рис. 109

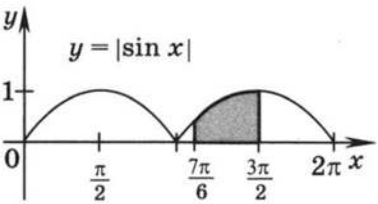


Рис. 110

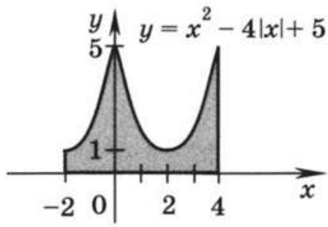


Рис. 111

4. См. рис. 111. **5.** Вторая. **6.** 3. **7.** $\frac{8}{3}$. **8.** $\frac{46}{3}$. **9.** $2\ln\frac{3}{2}$. **10.** 1. **11.** 120. **12.** $\frac{15}{2} + \ln 4$. **13.** $3 + \ln 4$. **14.** $\frac{10}{3}$. **15.** $\frac{1}{8}(\pi + 2)$. **16.** $\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}$. **17.** $\frac{4}{3}$. **18.** $\frac{32}{3}$. **19.** $\frac{9}{2}$. **20.** 2.

Вариант II

1. См. рис. 112. **2.** См. рис. 113. **3.** См. рис. 114. **4.** См. рис. 115. **5.** Первая. **6.** 6. **7.** $\frac{8}{3}$. **8.** $\frac{176}{3}$. **9.** $3\ln\frac{5}{2}$. **10.** 4.

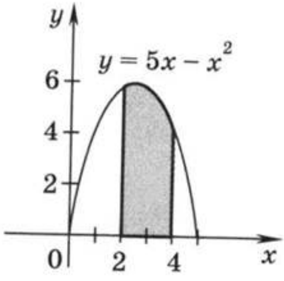


Рис. 112

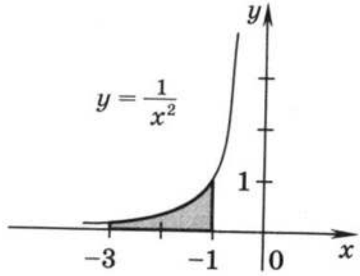


Рис. 113

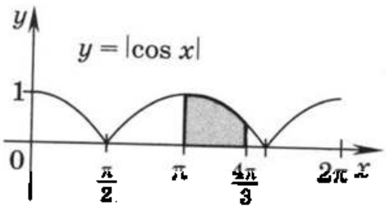


Рис. 114

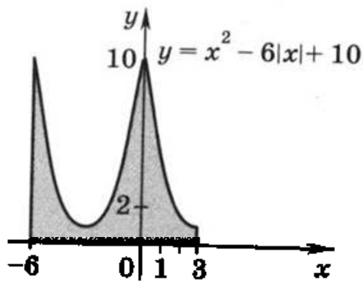


Рис. 115

11. $\frac{2295}{4}$. **12.** $\frac{21}{2} + \ln\frac{2}{5}$. **13.** $4 + \ln 3$. **14.** 6. **15.** $\frac{1}{8}(\pi + 2)$. **16.** $2\left(4 + \ln\frac{5}{3}\right)$. **17.** $\frac{32}{3}$. **18.** $\frac{4}{3}$. **19.** $\frac{137}{6}$. **20.** 2.

§ 58

Вариант I

1. 121,5. **2.** $\frac{4}{3}$. **3.** $\frac{32}{3}$. **4.** $\frac{9}{2}$. **5.** $\frac{81}{2}$. **6.** $\frac{9}{2}$. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** 9. **9.** $\frac{15}{4} - 4\ln 2$. **10.** $\frac{5}{12}$. **11.** $\frac{8}{3}$. **12.** $\frac{4}{3}$. **13.** $\frac{2}{3}$. **14.** $\frac{3}{2}$. **15.** $1 - \frac{\pi}{4}$. **16.** $\frac{8}{3}$. **17.** 18. **18.** $\frac{61}{24}$.

Вариант II

1. 121,5. **2.** $\frac{4}{3}$. **3.** $\frac{32}{3}$. **4.** $\frac{9}{2}$. **5.** $\frac{81}{2}$. **6.** $\frac{9}{2}$. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** 9. **9.** $\frac{15}{4} - 4\ln 2$. **10.** $\frac{5}{12}$. **11.** $\frac{8}{3}$. **12.** $\frac{4}{3}$. **13.** $\frac{2}{3}$. **14.** $\frac{3}{2}$. **15.** $1 - \frac{\pi}{4}$. **16.** $\frac{8}{3}$. **17.** 18. **18.** $\frac{61}{24}$.

§ 60

Вариант I

1. 36. 2. 1) 2; 2) 1; 3) 6; 4) 4; 5) 12; 6) 16. 3. 1) 6; 2) 4; 3) 24; 4) 18; 5) 60; 6) 48. 4. 1) 8; 2) 27. 5. 120. 6. 240. 7. 120. 8. 24.

Вариант II

1. 25. 2. 1) 2; 2) 1; 3) 6; 4) 4; 5) 12; 6) 25. 3. 1) 6; 2) 4; 3) 24; 4) 18; 5) 60; 6) 100. 4. 1) 8; 2) 27. 5. 24. 6. 720. 7. 360. 8. 12.

§ 61

Вариант I

1. 1) 1; 2) 4920. 2. 720. 3. 1) 120; 2) 24; 3) 48. 4. 1) 210; 2) $\frac{3}{28}$; 3) 190. 5. 1) $m+2$; 2) $m^2+8m+15$. 6. 1) $n=4$; 2) $n=3$. 7. 24. 8. 5040.

Вариант II

1. 1) 2; 2) 696. 2. 120. 3. 1) 720; 2) 120; 3) 120. 4. 1) $\frac{1}{110}$; 2) 45; 3) $\frac{1}{204}$. 5. 1) $\frac{1}{n+4}$; 2) $\frac{1}{n+7}$. 6. 1) $n=6$; 2) $n=4$. 7. 6. 8. 720.

§ 62

Вариант I

1. 1) 132; 2) 990; 3) 5040. 2. 1) 26; 2) 18; 3) 1,4; 4) 4. 3. 336. 4. 120. 5. 360. 6. 210. 7. 1) $m=10$; 2) $m=6$; 3) $m_1=7$, $m_2=8$. 8. $\frac{(12-n)(11-n)}{11}$. 9. 42. 10. $A_5^3 \cdot P_{10}$.

Вариант II

1. 1) 156; 2) 720; 3) 6720. 2. 1) 20; 2) 78; 3) $\frac{1}{32}$; 4) 30. 3. 210. 4. 60. 5. 42. 6. 360. 7. 1) $m=11$; 2) $m=6$; 3) $m_1=5$, $m_2=24$. 8. $\frac{12}{(13-n)(12-n)}$. 9. 336. 10. $A_4^2 \cdot P_6$.

§ 63

Вариант I

1. 1) 1; 2) 9; 3) 10; 4) 1; 5) 300; 6) 351; 7) 56; 8) 35. 2. 35. 3. 105. 4. 15. 5. $C_9^2 \cdot C_9^3$. 6. 1) 136; 2) 165; 3) 253; 4) 66045. 7. 1) $m=5$; 2) $m=5$; 3) $m=2$.

Вариант II

1. 1) 1; 2) 10; 3) 13; 4) 1; 5) 153; 6) 496; 7) 84; 8) 70. 2. 15. 3. 66. 4. 10. 5. $C_9^7 \cdot C_9^2$. 6. 1) 105; 2) 286; 3) 34; 4) 2300. 7. 1) $m = 1$; 2) $m_1 = 4$, $m_2 = 15$; 3) $m = 3$.

§ 64

Вариант I

1. 1) $a^7 + 7a^6 + 21a^5 + 35a^4 + 35a^3 + 21a^2 + 7a + 1$; 2) $1 - 9b + 36b^2 - 84b^3 + 126b^4 - 126b^5 + 84b^6 - 36b^7 + 9b^8 - b^9$. 2. 1) $1 + 16x + 112x^2 + 448x^3 + 1120x^4 + 1792x^5 + 1792x^6 + 1024x^7 + 256x^8$; 2) $64 - 192c + 240c^2 - 160c^3 + 60c^4 - 12c^5 + c^6$. 3. 1) $256b^4 - 64b^3 + 6b^2 - \frac{1}{4}b + \frac{1}{256}$; 2) $\frac{1}{243}x^5 + \frac{5}{27}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + 30x^2 + 135x + 243$. 4. 1) $316 - 124\sqrt{7}$; 2) $208 + 120\sqrt{3}$. 5. 1) $210a^2$; 2) $330b^9$. 6. 1) 256; 2) 256; 3) 126. 7. 1) $C_{20}^{18}a^5$; 2) $C_{26}^{10}x^{13}$.

Вариант II

1. 1) $x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1$; 2) $a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1$. 2. 1) $128 + 448y + 672y^2 + 540y^3 + 280y^4 + 84y^5 + 14y^6 + y^7$; 2) $1 - 16a + 112a^2 - 448a^3 + 1120a^4 - 1792a^5 + 1792a^6 - 924a^7 + 256a^8$. 3. 1) $\frac{1}{84} - \frac{4}{9}x + 6x^2 - 36x^3 + 81x^4$; 2) $\frac{1}{1024}b^5 + \frac{5}{64}b^4 + \frac{5}{2}b^3 + 40b^2 + 320b + 1024$. 4. 1) $576 - 256\sqrt{5}$; 2) $73 + 28\sqrt{6}$. 5. 1) $-56x^6\sqrt{x}$; 2) $792b^{-2}$. 6. 1) 512; 2) 64; 3) 254. 7. 1) $C_{14}^{10}b^6$; 2) $C_{24}^{12}x^5$.

§ 65

Вариант I

1. 1) Невозможное; 2) случайное; 3) достоверное. 2. 1) Шестёрка, семёрка, восьмёрка, девятка, десятка, валет, дама, король, туз (все — бубновой масти); равновозможные исходы; 2) зелёный, красный; исходы не являются равновозможными. 3. 1) Совместные; 2) совместные; 3) несовместные.

Вариант II

1. 1) Случайное; 2) невозможное; 3) случайное. 2. 1) Красный, чёрный; исходы не являются равновозможными; 2) ше-

стёрка, семёрка, восьмёрка, девятка, десятка, валет, дама, король, туз (все — трефовой масти); равновозможные исходы. **3.** 1) Совместные; 2) несовместные; 3) совместные.

§ 66

Вариант I

1. Изъята либо карта с числом, либо карта червовой масти; изъята карта червовой масти с числом. **2.** Названо либо чётное число, либо число, кратное 3 (т. е. одно из чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12); названо чётное число, кратное 3 (т. е. одно из чисел 6, 12). **3.** Событие $A + B$ — выпало либо число очков, меньшее 3, на белом кубике, либо 6 очков на красном, либо оба события произошли одновременно; событие AB — на белом кубике выпало меньше 3 очков, а на красном — 6 очков. **4.** Событие $A + B$ — либо на одном из кубиков появилось 1 или 2 очка, либо на одном из кубиков появилось 6 очков, либо на одном появилось 1 или 2 очка, а на другом — 6 очков; событие AB — на одном из кубиков появилось 1 или 2 очка, а на другом — 6 очков. **5.** 1) Выпало нечётное число очков; 2) вынута карта, отличная от дамы чёрной масти; 3) ни на одном из кубиков не появилось 6 очков. **6.** 1) $\bar{B}$; 2) $A + B$; 3) AB. **7.** $\bar{A}B$.

Вариант II

1. Изъятие карты либо трефовой масти, либо карты с картинкой; изъятие карты трефовой масти с картинкой. **2.** Названо либо число, не меньшее 11, либо кратное 4; названо либо число, не меньшее 11 и кратное 4 (т. е. одно из чисел 12, 16). **3.** Событие $A + B$ — либо на жёлтом кубике выпало 5 очков, либо на белом выпало не меньше чем 5 очков, либо оба этих события произошли одновременно; событие AB — на жёлтом кубике выпало 5 очков, а на белом — не меньше чем 5 очков. **4.** Событие $A + B$ — либо на одном из кубиков выпало 2 очка, либо на одном из кубиков выпало 5 или 6 очков, либо на одном выпало 2 очка, а на другом — 5 или 6 очков; событие AB — на одном кубике выпало 2 очка, а на другом — 5 или 6 очков. **5.** 1) Вынута карта, не являющаяся валетом красной масти; 2) выпало число очков, не меньшее 5 (т. е. либо 5, либо 6); 3) мишень не была поражена ни одним из двух выстрелов. **6.** 1) $\bar{C}$; 2) CD; 3) $C + D$. **7.** $C\bar{D}$.

§ 67

Вариант I

1. 1) 1; 2) 0; 3) $\frac{3}{184}$; 4) $\frac{1}{46}$. 2. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{5}{36}$. 3. 1) $\frac{8}{15}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{5}$. 4. 1) $\frac{1}{92}$; 2) $\frac{5}{184}$; 3) $\frac{7}{184}$; 4) $\frac{45}{184}$. 5. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{4}$. 6. 1) $\frac{2}{51}$; 2) $\frac{91}{153}$; 3) $\frac{56}{153}$.

Вариант II

1. 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{5}{144}$; 4) $\frac{1}{36}$. 2. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{5}{36}$. 3. 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$. 4. 1) $\frac{1}{72}$; 2) $\frac{1}{48}$; 3) $\frac{1}{144}$; 4) $\frac{95}{144}$. 5. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{18}$. 6. 1) $\frac{11}{24}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{11}{24}$.

§ 68

Вариант I

1. 0,15. 2. 0,999996. 3. $\frac{5}{6}$. 4. 1) $\frac{12}{25}$; 2) $\frac{4}{5}$. 5. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{13}{15}$. 6. $\frac{62}{95}$. 7. $\frac{281}{476}$.

Вариант II

1. 0,32. 2. 0,9994. 3. $\frac{5}{6}$. 4. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{11}{15}$. 5. 1) $\frac{9}{13}$; 2) $\frac{76}{91}$. 6. $\frac{37}{77}$. 7. $\frac{919}{1309}$.

§ 69

Вариант I

1. 1) Не являются; 2) являются. 3. 1) Не являются; 2) не являются. 4. 1) $\frac{9}{16}$; 2) $\frac{15}{16}$. 5. 1) $\frac{24}{77}$; 2) $\frac{12}{77}$; 3) $\frac{65}{77}$; 4) $\frac{53}{77}$. 6. 1) 0,54; 2) 0,005; 3) 0,995; 4) 0,46.

Вариант II

1. 1) Являются; 2) не являются. 3. 1) Не являются; 2) не являются. 4. 1) 0,0001; 2) 0,0199. 5. 1) $\frac{35}{221}$; 2) $\frac{80}{221}$; 3) $\frac{141}{221}$; 4) $\frac{186}{221}$. 6. 1) 0,459; 2) 0,006; 3) 0,994; 4) 0,541.

§ 70

Вариант I

1. 60%. 2. $P(A) \approx 0{,}15$.

Вариант II

1. 20%. 2. $P(A) \approx 0{,}05$.

§ 71

Вариант I

1. 1)

X	4	5	6
W	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2)

X	−1	3	4	7
W	0,2	0,35	0,3	0,15

2.

X	54	55	56	57	58
M	1	2	3	3	1
W	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

4.

X	1	2	3	4	5	6	8	9	10
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$

X	12	15	16	18	20	24	25	30	36
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Вариант II

1. 1)

X	2	3	4
W	0,1	0,6	0,3

2)

X	−1	0	2	4	5
W	0,08	0,24	0,36	0,2	0,12

2.

X	44	46	48	50	52
M	2	3	3	3	1
W	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

4.

X	1	2	3	4	5	6	8
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

X	9	10	12	15	16	18	20	24
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

§ 72

Вариант I

1. 1) 12; 2) 2; 3; 4. 2. 1) 5; 2) 8,5. 3. 1) 2; 2) $\frac{11}{60}$. 4. 1) 0; 0; $\frac{4}{5}$; 2) 3 и 4; 3; $2\frac{2}{3}$. 5. 1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{1}{3}$. 6. 1) 1; 0,5; 0,3; 2) 0 и 1; 1; $\frac{7}{9}$. 7. 1) 1,2; 2) $\frac{2}{3}$.

Вариант II

1. 1) 6; 2) 13 и 15. 2. 1) 2; 2) 13,5. 3. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{7}{18}$. 4. 1) 5 и 3; 3,5; $3\frac{2}{3}$; 2) 0; 0; 0,6. 5. 1) 2,5; 2) $\frac{17}{22}$. 6. 1) 3; 3; $1\frac{7}{12}$; 2) -2; $-1{,}5$; $-1\frac{1}{3}$. 7. 1) $3\frac{1}{11}$; 2) 1,4.

§ 73

Вариант I

1. 1) 198; 2) $\frac{37}{56}$. 2. 1) 6 м^2; 2) 1,5 ч^2. 3. 2 т. 4. 2,5. 5. Первая.

Вариант II

1. 1) 84; 2) $\frac{13}{18}$. 2. 1) 6 с^2; 2) 3,5 кг^2. 3. 2,7 м. 4. 1,0. 5. Вторая.

Оглавление

Глава X. Интеграл

Глава XI. Комбинаторика

Глава XII. Элементы теории вероятностей

Глава XIII. Статистика

Учебное издание

Шабунин Михаил Иванович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Дидактические материалы
к учебнику Ш. А. Алимова и других

11 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Центр естественно-математического образования
Руководитель центра *М. Н. Бородин*
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Л. Н. Белоновская, Н.Н. Сорокина, Т.Ю. Акимова, П.А. Бессарабова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художник *Е. В. Соганова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *О. Ю. Тупикиной*
Технический редактор и верстальщик *Н. Н. Репьева*
Корректор *И. П. Ткаченко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01.
Подписано в печать 09.08.17. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Бумага типографская. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 10,71. Доп. тираж 2000 экз. Заказ № 4467ТТ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.